Modèles multicritères fondés sur un critère unique de synthèse

Vincent Mousseau

Introduction

- L'approche du critère unique de syntèse vise à construire une fonction g synthétisant tous les critères :
  $g(a) = f(g_1(a), g_2(a), \ldots, g_n(a)))$,
- Adopter cette approche $\Rightarrow$ pré-ordre sur A,
- g permet de comparer les actions pour choisir parmi elles, les ranger, les affecter à des catégories,
- La construction de g est souvent difficile et requiert de demander beaucoup d'information au décideur.
- Deux aspects sont à étudier :
  - quelles propriétés doivent posséder les préférences du décideur pour être représentables par une fonction g ?
  - Comment construire la fonction g et fixer la valeur des paramètres intervenant dans la fonction analytique choisie ?

La somme pondérée

- C'est la forme analytique la plus simple et aussi la plus utilisée,
- La fonction g prend la forme analytique suivante:

$$g(a) = \sum_{i=1}^{n} w_i . g_i(a)$$

- La structure de préférence associée est :

$$\begin{cases} aPb \Leftrightarrow g(a) > g(b) \\ aIb \Leftrightarrow g(a) = g(b) \end{cases}$$

L'exemple de Thierry

Thierry veut acheter une voiture sportive. Après une première analyse, il considère les critères suivants :

- *Coût* : coût liés à la voiture sur une période de 4 ans (prix, entretien, essence, ...) calculé en euros,
- *Accélération* : temps nécessaire pour parcourir 1km, départ arrété (en secondes),
- *Reprise* : temps nécessaire pour parcourir 1km en partant en 5^{eme} vitesses à 40km/h (en secondes),
- *Freinage* : échelle qualitative recodée sur l'intervalle [0,4],
- *Tenue de route* : échelle qualitative recodée sur l'intervalle [0,4].

	Nom	**Coût** (euros)	**Accel.** (sec.)	**Reprise** (sec.)	**Freins** [0,4]	**Tenue-r** [0,4]
1	Fiat Tipo	18342	30.7	37.2	2.33	3.00
2	Alfa 33	15335	30.2	41.6	2.00	2.50
3	Nissan Sunny	16973	29.0	34.9	2.66	2.50
4	Mazda 323	15460	30.4	35.8	1.66	1.50
5	Mitsubishi Colt	15131	29.7	35.6	1.66	1.75
6	Toyota Corolla	13841	30.8	36.5	1.33	2.00
7	Honda Civic	18971	28.0	35.6	2.33	2.00
8	Opel Astra	18319	28.9	35.3	1.66	2.00
9	Ford Escort	19800	29.4	34.7	2.00	1.75
10	Reunault 19	16966	30.0	37.7	2.33	3.25
11	Peugeot 309 16V	17537	28.3	34.8	2.33	2.75
12	Peugeot 309	15980	29.6	35.3	2.33	2.75
13	Mitsubishi Galant	17219	30.2	36.9	1.66	1.25
14	Reunault 21	21334	28.9	36.7	2.00	2.25

L'exemple de Thierry

Thierry envisage de limiter son analyse aux voitures telles que Accel. ≤ 30, Freins ≥ 2 et Tenue-r ≥ 2

Les voitures restantes sont :

	Nom	**Coût** (€)	**Accel.** (sec.)	**Reprise** (sec.)	**Freins** [0,4]	**Tenue-r** [0,4]
3	Nissan Sunny	16973	29.0	34.9	2.66	2.50
7	Honda Civic	18971	28.0	35.6	2.33	2.00
11	Peugeot 309 16V	17537	28.3	34.8	2.33	2.75
12	Peugeot 309	15980	29.6	35.3	2.33	2.75

Il renonce finalement (considérant que ce filtre est trop "grossier") et conserve l'ensemble de choix initial.

L'exemple de Thierry

- Thierry utilise la somme pondérée:
$$\begin{aligned} g(a) &= -w_1.g_1(a) - w_2.g_2(a) - w_3.g_3(a) \\ &\quad +w_4.g_4(a) + w_5.g_5(a) \\ &\quad \text{avec } g_i(a) \geq 0,\ w_i \geq 0,\ \ i : 1 \ldots 5 \end{aligned}$$

- Les échelles sont hétérogènes
$\rightarrow$ normalisation nécessaire ($g_i(a) \geq 0, \forall a \in A$),

- Soit $g'_i(a) = \frac{g_i(a)}{g_i^{max}}$, la multiplication par une constante positive préserve le 0 et les ratios $\frac{g_i(a)}{g_i(b)}$

- Soit $g''_i(a) = \frac{g_i(a) - g_i^{min}}{g_i^{max} - g_i^{min}}$, la transformation afine conserve les ratios $\frac{g_i(a)}{g_i(b)}$ et les différences $g_i(a) - g_i(b)$.

L'exemple de Thierry

- Thierry considère que le 0 a une signification et applique g'_i à chaque critère,
- Le tableau de performance devient:

		Coût	**Accel.**	**Reprise**	**Freins**	**Tenue-r**
1	Fiat Tipo	0.859	0.996	0.894	0.875	0.923
2	Alfa 33	0.718	0.980	1.000	0.751	0.769
3	Nissan Sunny	0.795	0.941	0.838	1.000	0.769
4	Mazda 323	0.724	0.987	0.860	0.624	0.461
5	Mitsubishi Colt	0.709	0.964	0.855	0.624	0.538
6	Toyota Corolla	0.648	1.000	0.877	0.500	0.615
7	Honda Civic	0.889	0.909	0.855	0.875	0.615
8	Opel Astra	0.858	0.938	0.848	0.624	0.615
9	Ford Escort	0.928	0.954	0.834	0.751	0.538
10	Reunault 19	0.795	0.974	0.906	0.875	1.000
11	Peugeot 309 16V	0.822	0.918	0.836	0.875	0.846
12	Peugeot 309	0.749	0.961	0.848	0.875	0.846
13	Mitsubishi Galant	0.807	0.980	0.887	0.624	0.384
14	Reunault 21	$1,000$	$0,938$	$0,882$	$0,752$	$0,692$
	étendue	$0,351$	$0,091$	$0,166$	$0,500$	$0,615$

L'exemple de Thierry

- Il détermine les poids suivants pour traduire ses préférences sur l'importance des critères :

$$w_2 = 2,\ w_1 = w_3 = 1,\ w_4 = w_5 = 0.5$$

- d'où :

	Nom	$g(a)$	Rang
1	Fiat Tipo	$-2,847$	6
2	Alfa 33	$-2,919$	8
3	**Nissan Sunny**	$-\mathbf{2,633}$	1
4	Mazda 323	$-3,016$	11
5	Mitsubishi Colt	$-2,912$	7
6	Toyota Corolla	$-2,968$	10
7	Honda Civic	$-2,818$	5
8	Opel Astra	$-2,964$	9
9	Ford Escort	$-3,026$	12
10	Reunault 19	$-2,712$	4
11	Peugeot 309 16V	$-\mathbf{2,635}$	2
12	Peugeot 309	$-2,659$	3
13	Mitsubishi Galant	$-3,151$	14
14	Reunault 21	$-3,037$	13

L'exemple de Thierry

- si on répète l'analyse en ne considérant que les modèles passant le "filtre", on obtient :

	Nom	**Coût**	**Accel.**	**Reprise**	**Freins**	**Tenue-r**
3	Nissan Sunny	0.895	0.979	0.980	1.000	0.909
7	Honda Civic	1.00	0.946	1.000	0.876	0.727
11	Peugeot 309 16V	0.924	0.956	0.978	0.876	1.00
12	Peugeot 309	0.842	1.000	0.992	0.876	1.00
	étendue	$0,158$	$0,054$	$0,022$	$0,124$	$0,272$

d'où

	Nom	$g(a)$	Rang
3	Nissan Sunny	$-2,880$	2
7	Honda Civic	$-3,090$	4
11	Peugeot 309 16V	$-\mathbf{2,876}$	**1**
12	Peugeot 309	$-2,896$	3

Il apparaît des inversions de rangs ($3 \leftrightarrow 11$, $7 \leftrightarrow 10$,...)

L'exemple de Thierry

- L'instabilité du classement résulte de la manière ave laquelle la normalisation est effectuée,
- Il faut normaliser de façon indépendante des alternatives,
- Problème : le résultat doit être indépendant de la normalisation retenue,

L'exemple de Thierry

- les poids w_i, w_j représentent des *taux de substitution* : un désavantage de w_j unités sur le critère g_i est compensé par un avantage de w_i unités sur le critère g_j

$$w_i.(g_i(a) - g_i(b)) = w_j(g_j(b) - g_j(a))$$
$$\Rightarrow \quad \frac{g_i(a)-g_i(b)}{g_j(b)-g_j(a)} = \frac{w_j}{w_i}$$

- Ces poids dépendent de l'unité sur chaque échelle (secondes$\leftrightarrow$ minutes $\Rightarrow w_j \leftrightarrow$...),
- La valeur des w_j doivent être définis en relation avec les échelles sur les critères.

L'exemple de Thierry

- Implicitement les échelles sont considérées linéaires,
- Les différences d'évaluation sur l'échelle d'un critère se répercutent de façon identique tout au long de l'échelle,
- Le gain d'une seconde de 29 sec. à 28 sec. ou de 32 sec. à 31 sec. sur le critère *Accel.* se valorise de façon identique,
- Les différences entre les modèles 5 et 3 (29.7-29=0.7 sec.) et 3 et 11 (29-28.3=0.7 sec) ne sont pas jugées équivalentes par Thierry ($5 \ominus 3 \prec 3 \ominus 11$),
- L'échelle du critère *Accel.* n'est pas linéaire.

Multi-attribute value model

- Extension "naturelle" de la somme pondérée qui prend en compte la non-linéarité des préférences,
- le modèle MAVT prend la forme suivante :

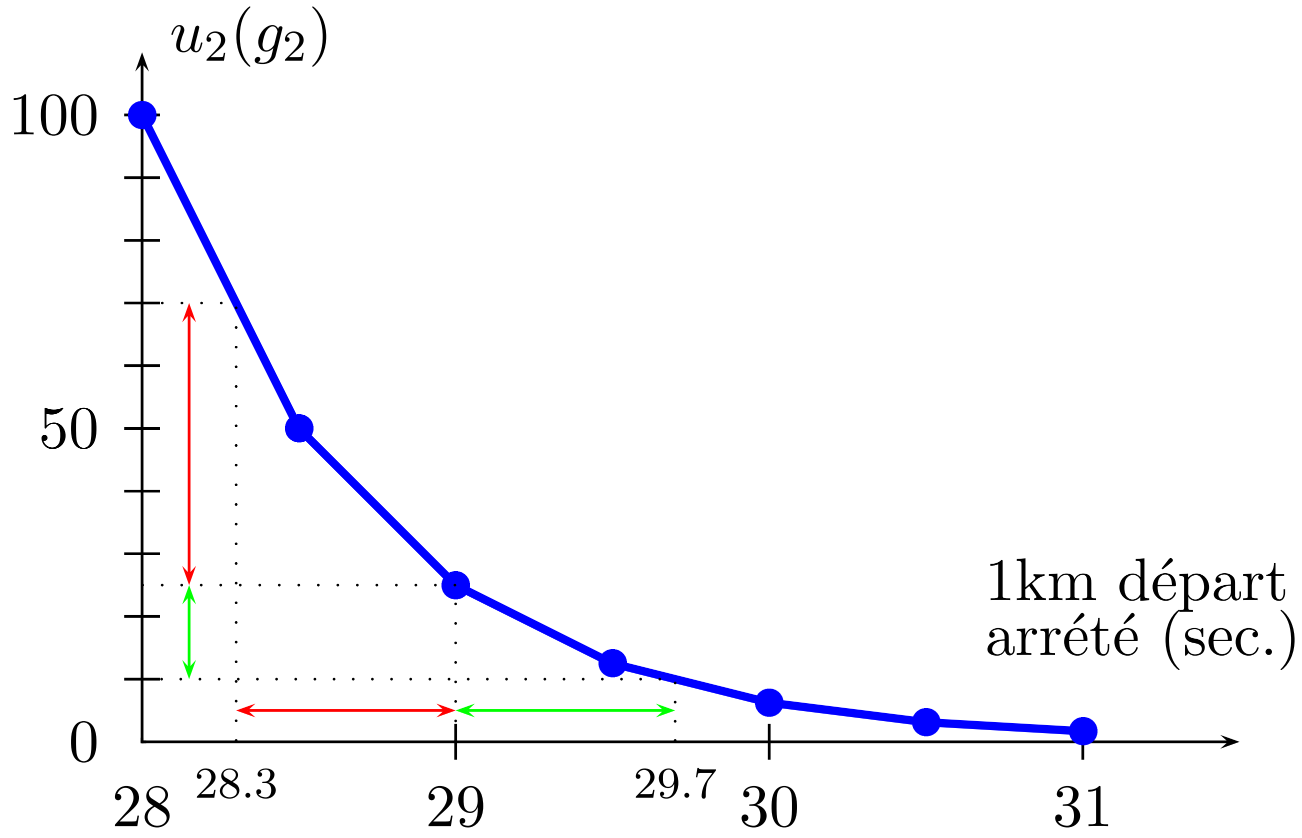
$$\begin{cases} aPb \Leftrightarrow u(a) > u(b) \\ aIb \Leftrightarrow u(a) = u(b) \end{cases} \quad \text{avec } u(a) = f(g_1(a), \ldots, g_n(a))$$

- Un cas particulier est la forme additive :

$$u(a) = \sum_{i=1}^{n} w_i . u_i(g_i(a))$$

$$\text{avec } u_i(g_i^{min}) = 0, u_i(g_i^{max}) = 100 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Un exemple de fonction de valeur additive



- u(29.7 s.)=10, u(29 s.)=25, u(28.3 s)=70.

Construction de fonctions de valeur

- Pour spécifier un modèle additif il faut définir les fonctions u_i, $\forall i \in F$ et les "poids" w_i, $\forall i \in F$,
- Il existe plusieurs méthodes pour construire les u_i,
- Ces méthodes doivent être appliquée plusieurs fois pour construire chaque fonction u_i,
- Il existe plusieurs techniques pour définir les w_i,
- *Exemple* :
  soit un problème tri-critère de choix de voiture
  { confort, coût, accel. },

Construction des fonctions u_i

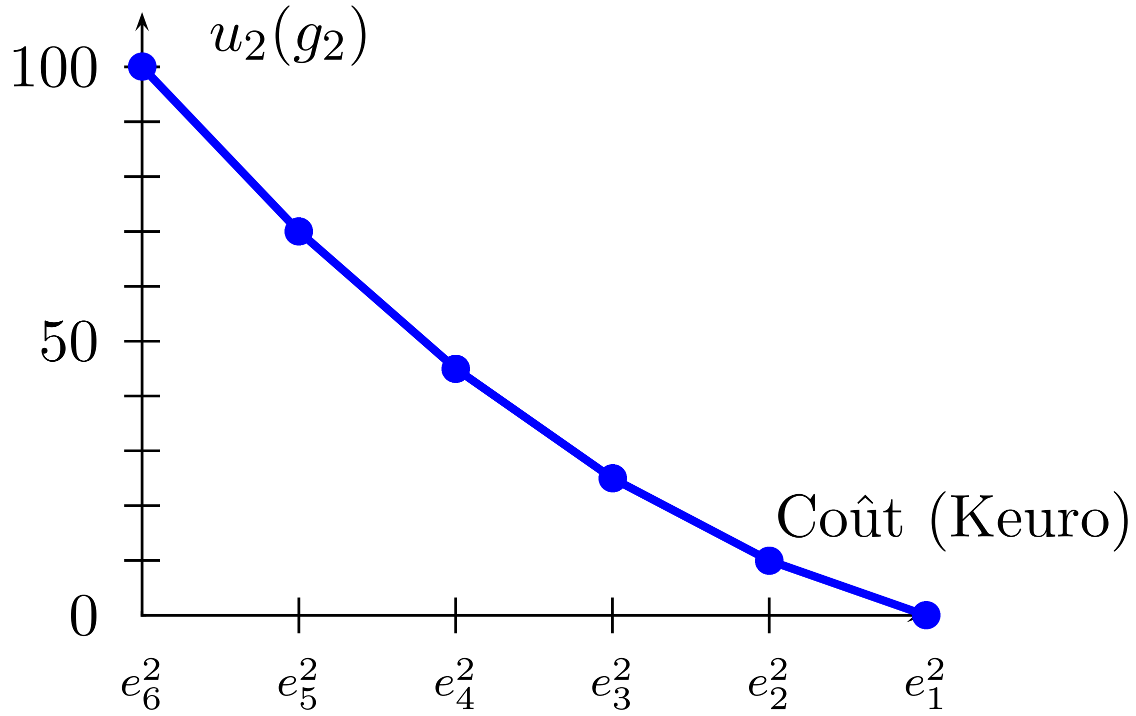
- Méthode 1 : adapté lorsque le nombre de valeurs sur l'échelle E_i est fini
  1. Ranger les éléments de E_i,
  2. Ranger les intervalles entre éléments consécutifs dans le rangement précédent,
  3. Attribuer des valeurs respectant l'information obtenue aux étapes 1 et 2,
- *Exemple* : g_1 critère confort,
  1. "très confortable" $\succ$ "confortable" $\succ$ "assez confortable" $\succ$ "peu confortable" $\succ$ "inconfortable", $(e_1^1 \succ e_2^1 \succ e_3^1 \succ e_4^1 \succ e_5^1)$,
  2. $(e_2^1 \ominus_1 e_3^1) \succ (e_4^1 \ominus_1 e_3^1) \succ (e_1^1 \ominus_1 e_2^1) \sim (e_4^1 \ominus_1 e_5^1)$,
  3. $u_1(e_1^1) = 100$, $u_1(e_2^1) = 85$, $u_1(e_3^1) = 45$, $u_1(e_4^1) = 15$, $u_1(e_5^1) = 0$,

Construction des fonctions u_i

Méthode 2 :

g_2 : coût à l'achat (les modèles coûtent de 10 à 20 Keuros),

1. on discrètise l'échelle :$e_1^2 = 20$K€, $e_2^2 = 18$K€, $e_3^2 = 16$K€, $e_4^2 = 14$K€, $e_5^2 = 12$K€, $e_6^2 = 10$K€,
2. $(e_2^2 \ominus_2 e_1^2) \succ (e_3^2 \ominus_2 e_2^2) \succ (e_4^2 \ominus_2 e_3^2) \succ (e_5^2 \ominus_2 e_4^2) \sim (e_6^2 \ominus_2 e_5^2)$,
3. $u_i(e_1^2) = 0$, $u_i(e_2^2) = 10$, $u_i(e_3^2) = 25$, $u_i(e_4^2) = 45$, $u_i(e_5^2) = 70$,$u_i(e_6^2) = 100$,
4. On suppose la fonction linéaire par morceaux.


$u_2(g_2)$
100
50
0
Coût (Keuro)
e_6^2
e_5^2
e_4^2
e_3^2
e_2^2
e_1^2

Construction des coefficients w_i

Méthode :

1. soit b_j l'action telle que $g_i(b_j) = g_i^{min}$, $\forall i \neq j$ et $g_j(b_j) = u_j^{max}$.
   Classer par ordre de préférence les b_j, $j \in F$ (supposons que le classement soit $b_n \succ \ldots \succ b_1$), on en déduit que $w_n \geq \ldots \geq w_1$

2. soit b_n^j l'action t. q. $g_i(b_n^j) = g_i^{min}, \forall i \neq n$;
   déterminer $g_n(b_n^j)$ tel que $b_1 I b_n^j$
   d'où $u(b_n^j) = u(b_1)$ donc
   $\sum_{i=1}^{n} u_i(b_1) = \sum_{i=1}^{n} u_i(b_n^j)$
   $100.w_1 = u_n(g_n(b_n^j)).w_1$, d'où $\frac{w_n}{w_1} = \frac{100}{u_i(x_i)}$

3. procéder de façon identique pour g_2, ..., g_{n-1}

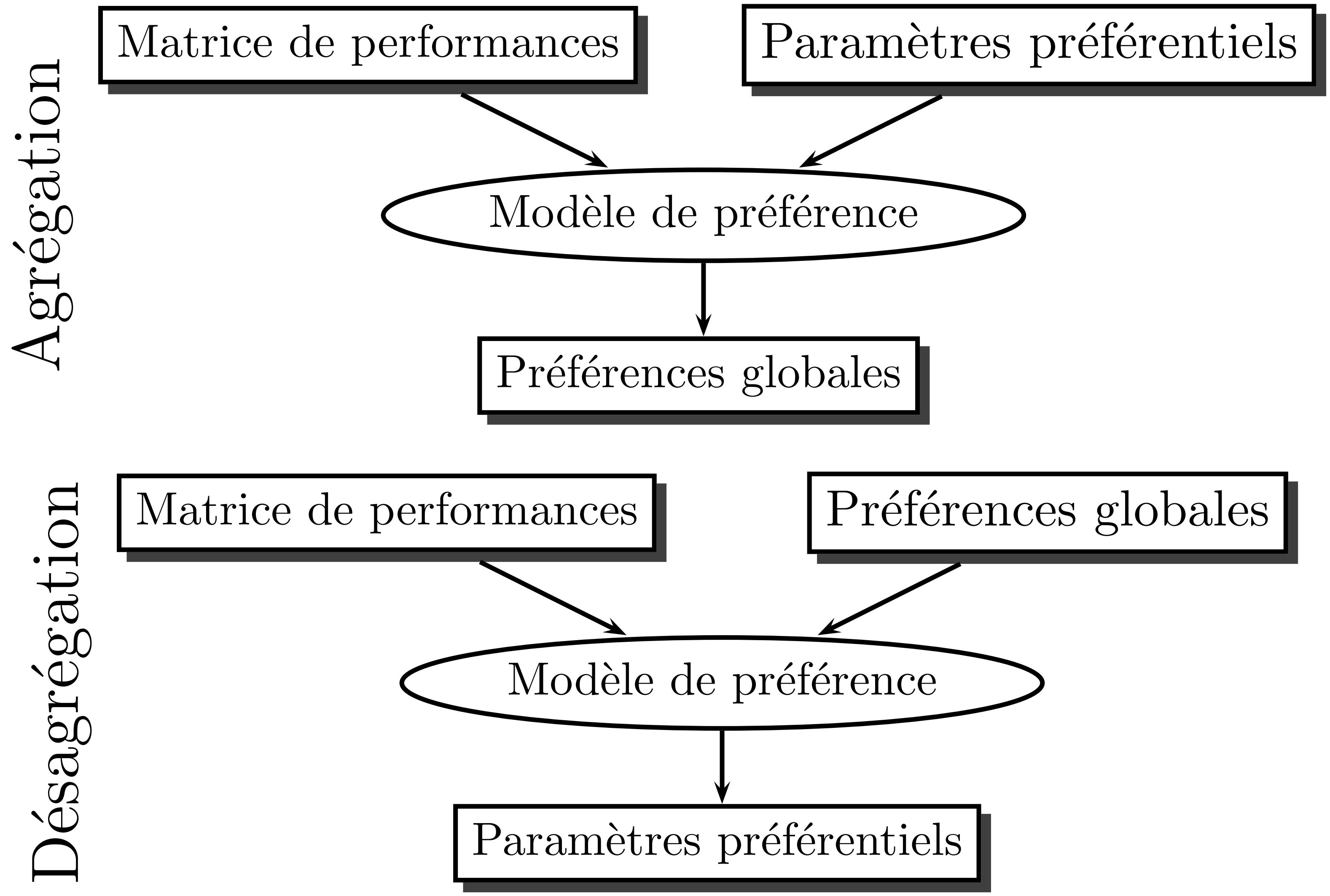
4. on obtient ainsi les ratios $\frac{w_n}{w_i}$, $i = 1, \ldots, n-1$,

Construction des coefficients w_i

Soit les critères { confort, coût, accel. },

1. (inconfortable, 20K€, 28 s.)
   $\succ$ (inconfortable, 10K€, 31 s.)
   $\succ$ (très confortable, 20K€, 31 s.)
   (c'est à dire $b_3 \succ b_2 \succ b_1$)
   donc $u(b_3) > u(b_2) > u(b_1)$ d'où $w_3 > w_2 > w_1$,
2. (très confortable, 20K€, 31 s.) I (inconfortable, 20K€, 29.5 s.)
   d'où $100.w_1 = u_3(29.5s.)$ donc $\frac{w_3}{w_1} = \frac{100}{u_3(29.5S.)} = \frac{100}{12.5} = 8$
3. (inconfortable, 10K€, 31 s.) I (inconfortable, 20K€, 28.5 s.)
   d'où $100.w_2 = u_3(28.5s.)$ donc $\frac{w_3}{w_2} = \frac{100}{u_3(28.5S.)} = \frac{100}{50} = 2$
4. posons $w_3 = 8 \;\Rightarrow\; w_1 = 1,\; w_2 = 4$, or $\sum_{i=1}^{3} w_i = 1$
   donc $w_1 = \frac{1}{13}$, $w_1 = \frac{4}{13}$ et $w_3 = \frac{8}{13}$,

UTA : Agrégation désagrégation



Approche par Agrégation / Désagrégation

- Agrégation : Démarche classique de mise en oeuvre (recueil d'information préférentielle, utilisation du mécanisme d'agrégation pour produire un "résultat"),
- Désagrégation : Démarche Classique "inverse" (à partir d'un résultat, inférer l'information préférentielle qui produit ce résultat à travers le mécanisme d'agrégation),
- Agrégation/Désagrégation : démarche iterative alternant des phases d'agrégation et de désagrégation :
  - calibration interactive d'un modèle de critère unique de synthèse,
  - apprentissage constructif.

UTA

- Définir un classement sur un sous ensemble d'actions ($a_2 \succ a_{13} \succ a_6 \succ a_{18}$),
- Un programme linéaire minimise une fonction d'erreur et infère un jeu de fonctions de valeur additives compatible avec le classement,
- Ces fonctions de valeurs permettent de déterminer un classement sur l'ensemble complet des actions potentielles,

Inférence de la fonction d'utilité u

- Modèle recherché : $u(a) = \sum_{i=1}^{n} u_i(g_i(a))$ avec u_i une fonction linéaire par morceaux,
- si $z_i \in [u_i^l, u_i^{l+1}]$ alors $u_i(z_i) = u_i(u_i^l) + \frac{z_i - u_i^l}{u_i^{l+1} - u_i^l}$
- A' un ensemble d'actions pour lequel le décideur donne un classement,
- Fonction d'utilité inférée u'. on a : $u'(a) = u(a) + \sigma(a)$, $\forall a \in A'$ où $\sigma(a)$ est l'erreur d'estimation de $u(a)$.

Inférence de la fonction d'utilité u

- Le programme mathématique à résoudre est :

$$
\begin{array}{ll}
Max & \sum_{a \in A'} \sigma(a) \\
s.t. & u'(a) - u'(b) = 0 \text{ si } aIb \\
 & u'(a) - u'(b) > 0 \text{ si } aPb \\
 & u'_i(u_i^l) - u'_i(u_i^{l+1}) > 0,\ \forall i,\ \forall l \\
 & u'_i(u_i^0) = 0,\ \forall i \\
 & \sum_{i=1}^{n} u'_i(u_i^L) = 1, \\
 & \text{variables de décision: } u'_i(u_i^l),\ \forall i,\ \forall l
\end{array}
$$

Approche par Agrégation / Désagrégation

Intérêt de l'approche

- faire s'exprimer le décideur dans "son langage",
- assure une cohérence les préférences exprimées et leur prise en compte dans le modèle,
- ne pas faire reposer sur le DM la cohérence entre le système de valeur du DM et le modèle de ses préférences,
- mise en oeuvre de l'approche par apprentissage constructif (optique reflexion/apprentissage pour le DM).

UTA : Agrégation / Désagrégation

Démonstration du logiciel