DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE

Incertitudes de mesure

Benoît Sabot

Vocabulaire et définitions

Généralités

- « Science de la mesure associée à l'évaluation de son incertitude » (Académie des sciences)
  Metro- ; du grec « metron » mesure

- Un résultat de mesure comporte trois éléments :

1. la valeur numérique obtenue

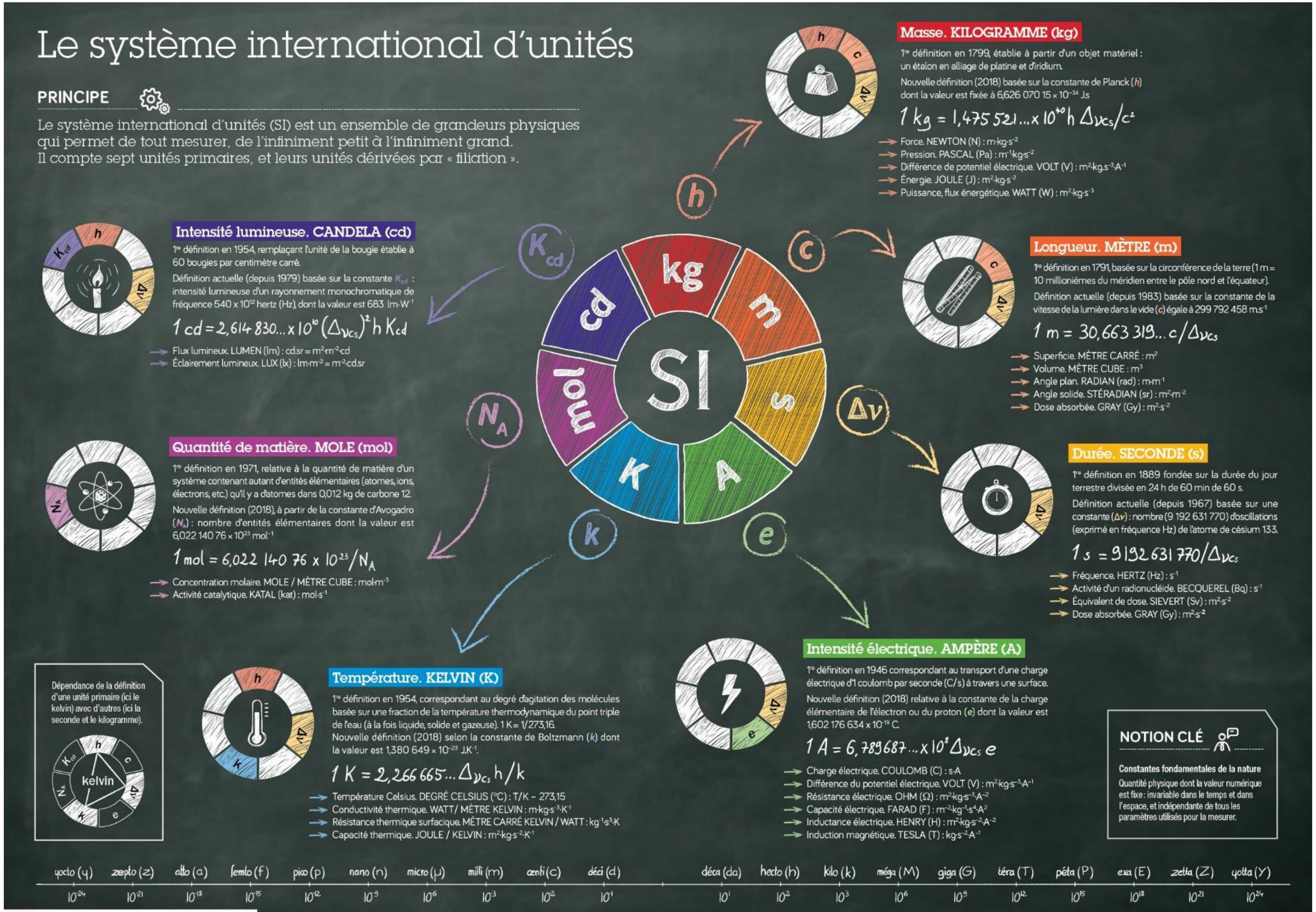
2. l'unité de mesure (choisie dans le Système International)

   La valeur de la grandeur physique est le produit de la valeur numérique par l'unité utilisée : L = 3 m ⇔ L = 3 x 1 m

3. Le troisième paramètre quantifie le doute sur la mesure : c'est l'incertitude

   $L = 3 \pm 1$ m à $k = 2$

Les unités du système international



Les défis du CEA Décembre 2018 - Janvier 2019 N°233
Aurélien Boudault (infographie), Aude Ganier, en collaboration avec Alexandre Bounouh, chef de département au CEA-List

Erreur

- **<u>Erreur (absolue) de mesure :</u> résultat d'un mesurage moins une valeur (conventionnellement) vraie du mesurande.**

- **Notes :**
  - L'erreur est un concept idéal, les erreurs ne pouvant être connues exactement (il peut arriver en pratique que le cas idéal soit approché : métrologie légale par exemple).
  - Exemple : erreur due à l'impédance non infinie d'un voltmètre utilisé pour déterminer une différence de potentiel.

- **<u>Erreur relative :</u> rapport de l'erreur absolue de mesure à une valeur (conventionnellement) vraie du mesurande.**

Incertitude

- **Définition :**

Paramètre non négatif qui caractérise la dispersion des valeurs attribuées à un mesurande, à partir des informations utilisées.

Il est maintenant généralement admis que, même lorsque toutes les composantes des erreurs connues ou suspectées ont été évaluées et les corrections appropriées ont été appliquées, il reste encore une incertitude sur la validité du résultat obtenu.

Autrement dit, l'incertitude c'est le doute sur la représentativité du mesurande.

Méthode d'évaluation des incertitudes

- **Unique : quantifie le doute sur la mesure**
- **Universelle : applicable à toute mesure**
- **Cohérente : calculable à partir des composantes induisant des incertitudes**
- **Transférable : utilisable pour une autre mesure**

La bible du métrologue : vocabulaire

- https://www.bipm.org/fr/publications/guides/vim.html

→ Le JCGM 200:2012 est une version corrigée de la 3e édition qui annule et remplace le JCGM 200:2008 (voir le *Corrigendum* du JCGM 200:2008) ainsi que la 2e édition de 1993. Il est possible de télécharger le JCGM 200:2012 au format PDF ou de consulter la version annotée accessible en ligne.

↘ *Vocabulaire international de métrologie – Concepts fondamentaux et généraux et termes associés* (VIM, 3e édition)
JCGM 200:2012 (JCGM 200:2008 avec corrections mineures)

↘ Voir également : **Définitions du VIM et annotations informatives** (format html)
(mise à jour 29 avril 2017)

Les annotations ont été développées exclusivement par le Groupe de travail 2 du JCGM (JCGM-WG2).

Le VIM, publié par le JCGM en anglais et en français, a été traduit dans plusieurs autres langues, parmi lesquelles :

l'allemand, l'arabe, le catalan, le croate, l'espagnol (Espagne et Pérou), le hongrois, l'italien, le japonais, le portugais (Portugal et Brésil), le roumain, le russe, le serbe, le tchèque, le thaï, le turc et l'ukrainien.

Pour plus d'informations, veuillez contacter votre laboratoire national de métrologie.

↘ **Articles liés**

GUM :
- **Atelier du BIPM sur l'incertitude de mesure**
- Logiciels liés au GUM et aux suppléments 1 et 2 du GUM
- Tutoriel pour les métrologistes sur le système statistique et probabiliste qui sous-tend le GUM et les documents associés
- Bibliographie sur l'incertitude de mesure
- Nouvelles du JCGM-WG1
- JCGM-WG1 (GUM)

VIM :
- Définitions du VIM et annotations informatives
- Les principes de base de la 3e édition du VIM (VIM3)
- Vos questions sur le VIM3
- Nouvelles du JCGM-WG2
- JCGM-WG2

- **Le VIM : Vocabulaire International de Métrologie : disponible gratuitement sur internet avec traduction français / anglais.**

La bible du métrologue : le guide

- https://www.bipm.org/fr/publications/guides/gum.html

NOTE: Afin de pouvoir utiliser au mieux les liens hypertextes reliant les documents en anglais, le lecteur est prié de télécharger en un seul fichier ZIP tous les documents du JCGM disponibles actuellement [documents en anglais].

→ Le *Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure* (GUM) constitue le document de référence fondamental :

Évaluation des données de mesure – Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure
(Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement)
JCGM 100:2008
(GUM 1995 avec des corrections mineures/GUM 1995 with minor corrections)

Note : Le document JCGM 100:2008 est également disponible en format HTML sur le portail JCGM sur le site internet de l'ISO.

→ Le Groupe de travail 1 du JCGM (JCGM-WG1) prépare une série de documents en complément du GUM. Les quatre premiers d'entre eux ont été approuvés et sont disponibles ici (en format pdf et en anglais). Pour acquérir des exemplaires imprimés, veuillez vous adresser à l'ISO (ou à l'AFNOR pour des versions en français).

Evaluation of measurement data – An introduction to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" and related documents
JCGM 104:2009
Évaluation des données de mesure – Une introduction au « Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure » et aux documents qui le concernent

Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" – Propagation of distributions using a Monte Carlo method
JCGM 101:2008
Évaluation des données de mesure – Supplément 1 du « Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure » – Propagation de distributions par une méthode de Monte Carlo

Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" – Extension to any number of output quantities
JCGM 102:2011
Évaluation des données de mesure – Supplément 2 du « Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure » – Extension à un nombre quelconque de grandeurs de sortie

Evaluation of measurement data – The role of measurement uncertainty in conformity assessment
JCGM 106:2012
Évaluation des données de mesure – Le rôle de l'incertitude de mesure dans l'évaluation de la conformité

Evaluation of measurement data – Concepts and basic principles

Les documents suivants sont également en cours de préparation :

Evaluation of measurement data – Supplement 3 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" – Modelling

Evaluation of measurement data – Applications of the least-squares method

Articles liés

GUM :
- **Atelier du BIPM sur l'incertitude de mesure**
- Logiciels liés au GUM et aux suppléments 1 et 2 du GUM
- Tutoriel pour les métrologistes sur le système statistique et probabiliste qui sous-tend le GUM et les documents associés
- Bibliographie sur l'incertitude de mesure
- Nouvelles du JCGM-WG1
- JCGM-WG1 (GUM)

VIM :
- Définitions du VIM et annotations informatives
- Les principes de base de la 3e édition du VIM (VIM3)
- Vos questions sur le VIM3
- Nouvelles du JCGM-WG2
- JCGM-WG2

- **Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure : fondé sur les recommandations du Comité International des Poids et Mesures (CIPM), NORME ISO.**

Le résultat de mesure

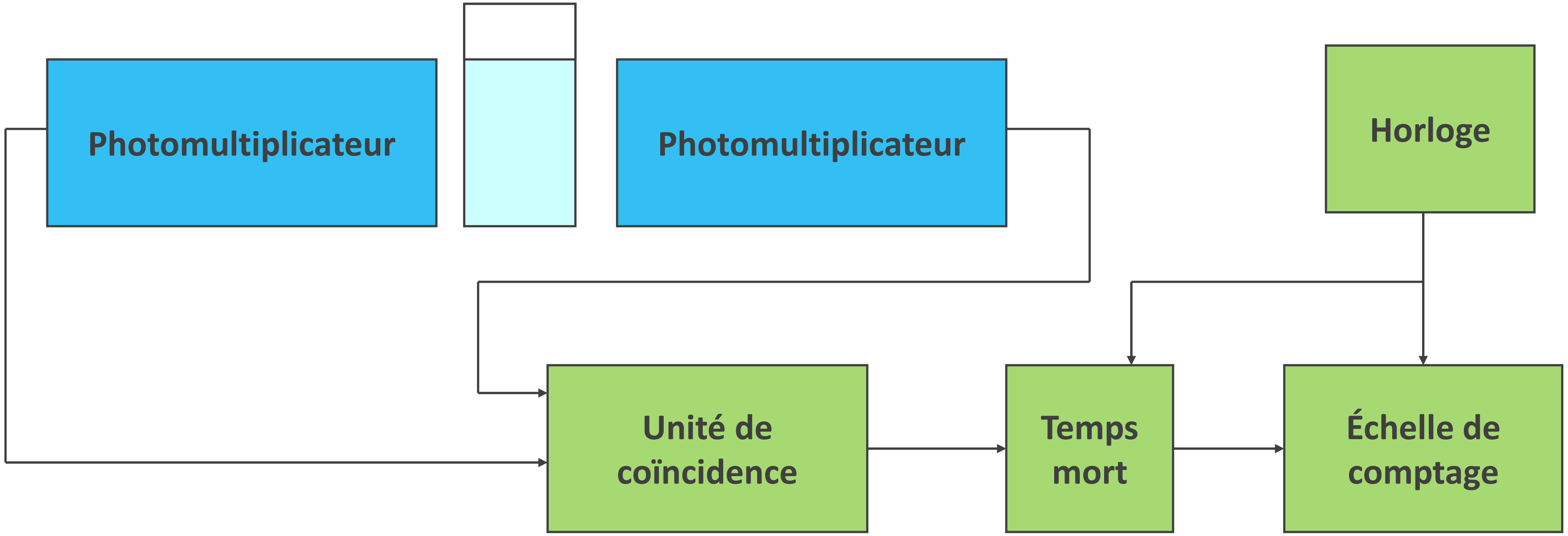
Un résultat de mesure est une variable aléatoire…

…et doit donc être traité en conséquence !!!!

- **Lorsque l’on répète une mesure, on ne trouve généralement pas exactement le même résultat**
- **Pourquoi les valeurs de mesure fluctuent ? Pour mesurer il faut :**
  - Définir un mesurande (ici l’activité de l’objet),
  - Réaliser le système de mesure qui donne accès au mesurande,
  - Lire les valeurs données par l’instrument de mesure (c/s),
  - Calculer la valeur du mesurande.
- **Peut-on associer une valeur plausible à une série de mesure ?**
  - Comment la calculer ?
  - Est-ce suffisant pour décrire la mesure ?

Le mesurande

- **Activité : nombre de désintégrations par seconde**
  - La désintégration radioactive se fait «au hasard», c’est un phénomène aléatoire. Pour une activité donnée, le nombre de désintégrations varie d’une seconde à l’autre. Il n’est pas possible de le prévoir, mais seulement de l’estimer «en moyenne».
- **Réaliser un système de mesure : exemple scintillation liquide**



La lecture de l'appareil et le calcul

- **Après lecture de l'appareil de mesure on obtient :**

$$Activité = \frac{Taux\ de\ comptage}{Rendement\ de\ détection}$$

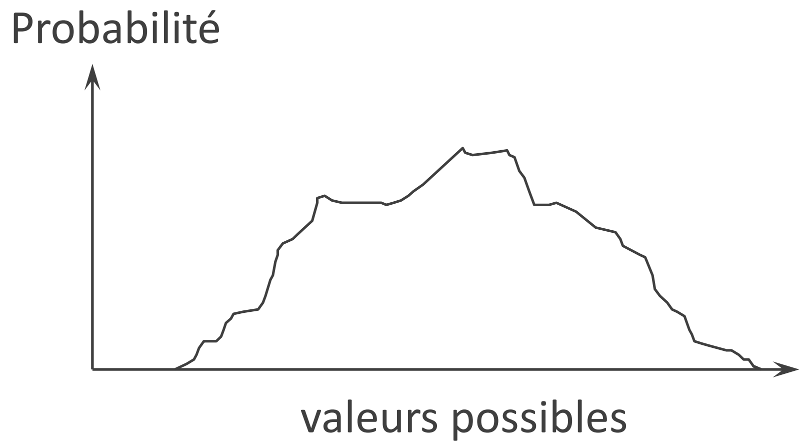
- **Or : l'activité apparente fluctue d'une mesure à l'autre, l'efficacité de détection peut fluctuer car elle dépend :**
    - du quenching de la source
    - du rendement du détecteur
    - des paramètres externes (T, P,...)

➔ **La mesure fluctue, c'est une variable aléatoire**

Une variable aléatoire

Généralités

- **Variable qui n'a pas une valeur unique mais peut prendre, avec une certaine probabilité, une valeur imprévisible parmi un ensemble de valeurs possibles.**



- **Probabilité : nombre compris entre 0 et 1 indiquant la « vraisemblance »**
  - P = 0, impossible ; P = 1, certain ; somme des probabilités de tous les événements indépendants = 1
  - NB : en observant un grand nombre d'événements, la fréquence tend vers la probabilité (mais la probabilité peut être définie a priori…)

Paramètres calculés

- **Soient *n* mesures équivalentes : $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$**
- **Moyenne :**

$$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

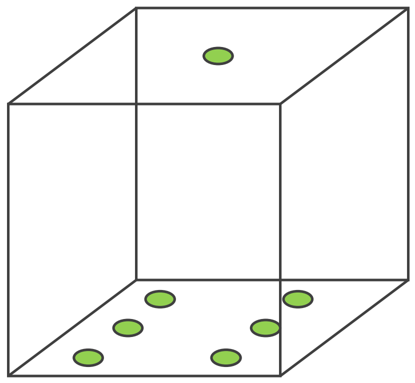
  - Estime la valeur la plus « plausible »
- **L'écart-type :**

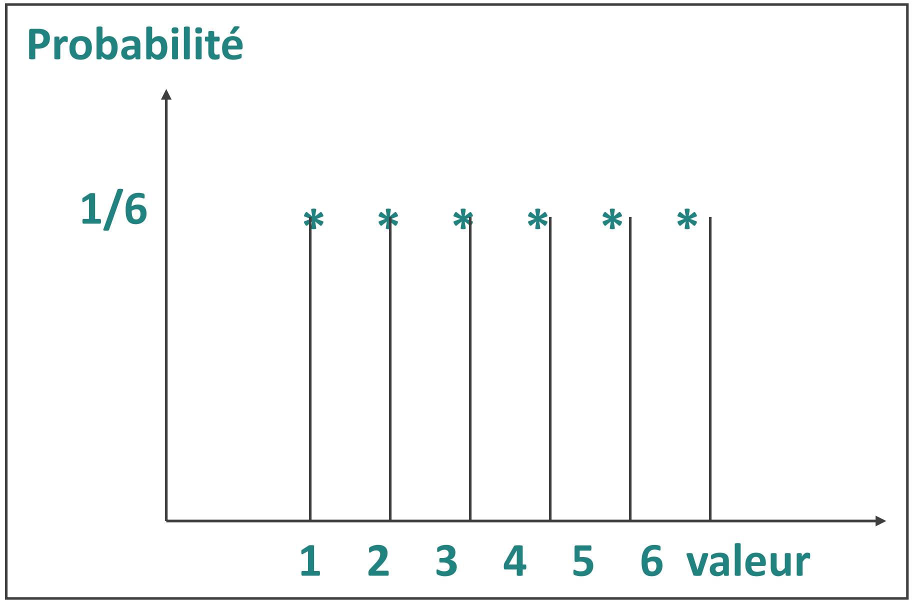
$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - M)^2}$$

  - Estime la dispersion des valeurs
  - Variance : *s^2 soit l'écart type la racine carrée de la variance*

Généralités et exemple 1

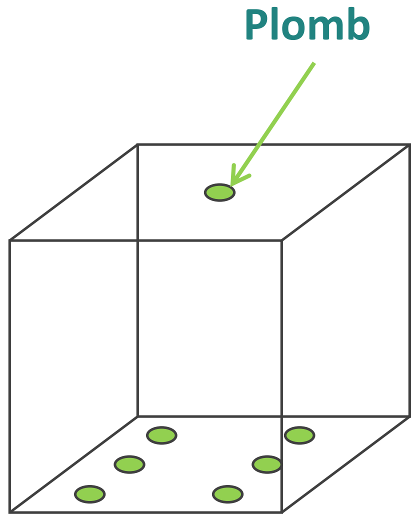
- **Loi décrivant les «propriétés du hasard» gouvernant la variable**
  - on peut distinguer les variables discrètes et les continues,
  - toutes les variables ne suivent pas les mêmes lois,
  - il est bon de connaître quelques lois célèbres pour prévoir certaines propriétés de la variable aléatoire …
- **Loi discrète uniforme (exemple du dé « normal »)**

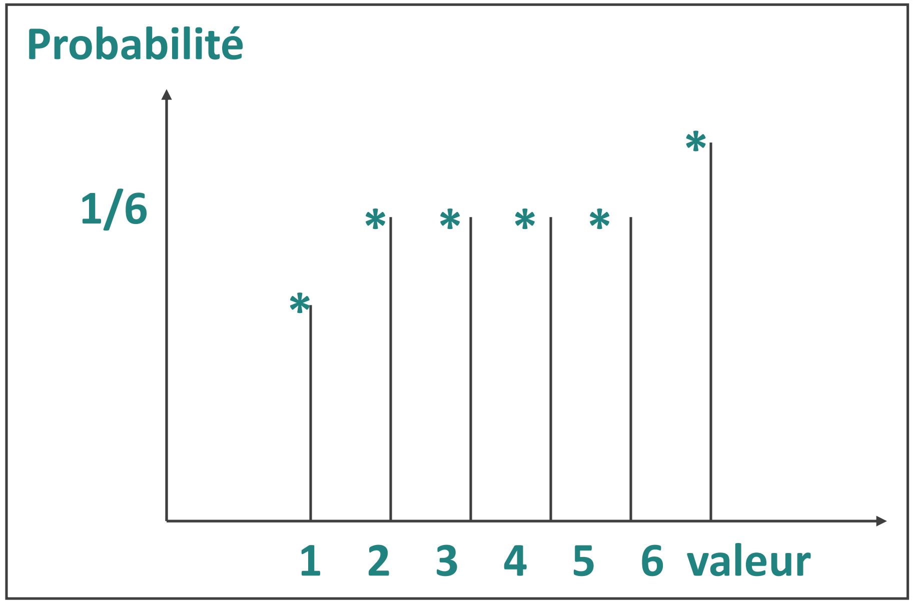




Exemple 2

- Loi non uniforme (exemple du dé pipé)





Exemple 3

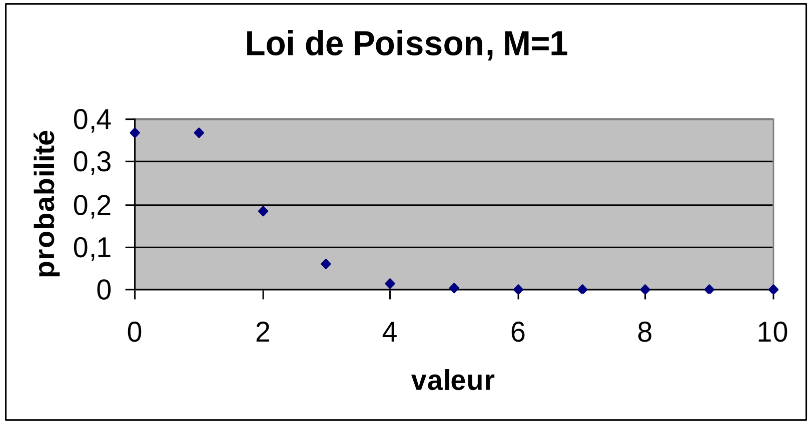
- Loi de Poisson : *P(x,M)* est la probabilité d'obtenir la valeur *x* pour une valeur moyenne de *M*

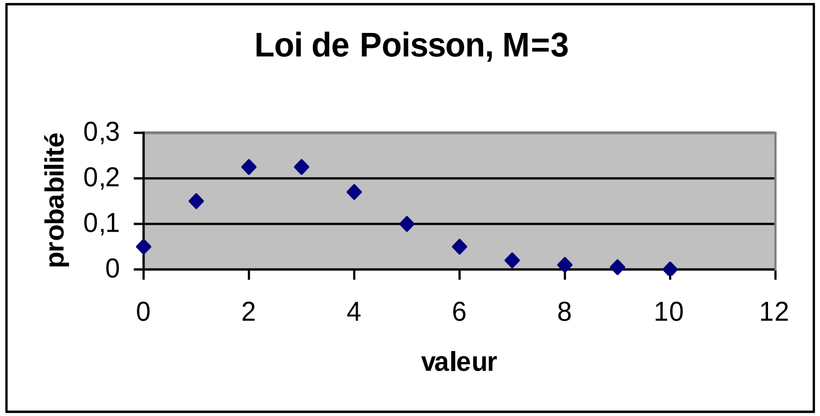
$$P(x,M) = \frac{M^{x} \times e^{-M}}{x!}$$

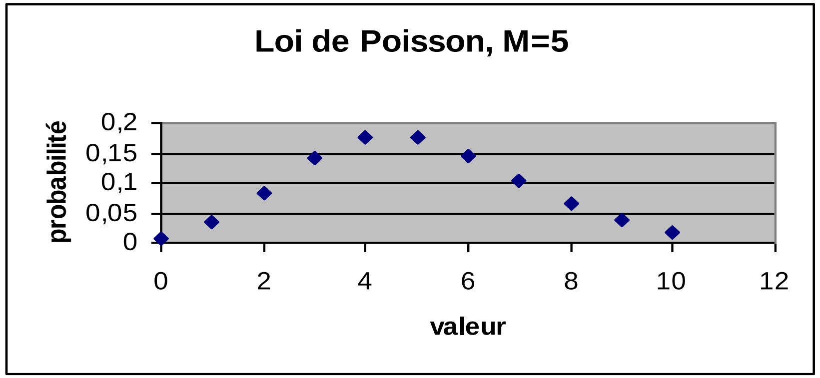
- Écart-type :

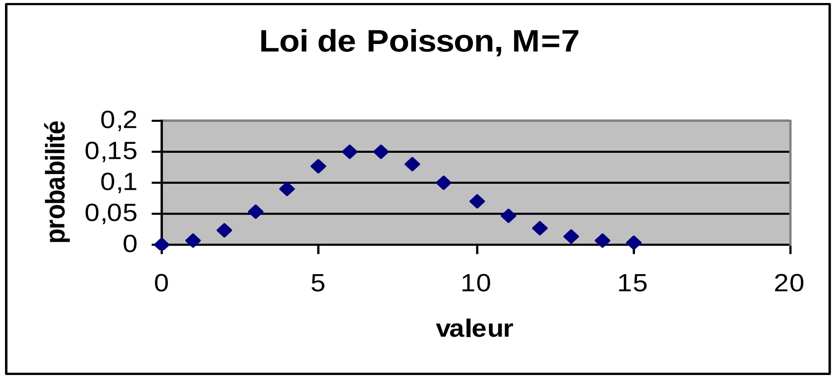
$$s = \sqrt{M}$$

Exemples 3 : loi de Poisson

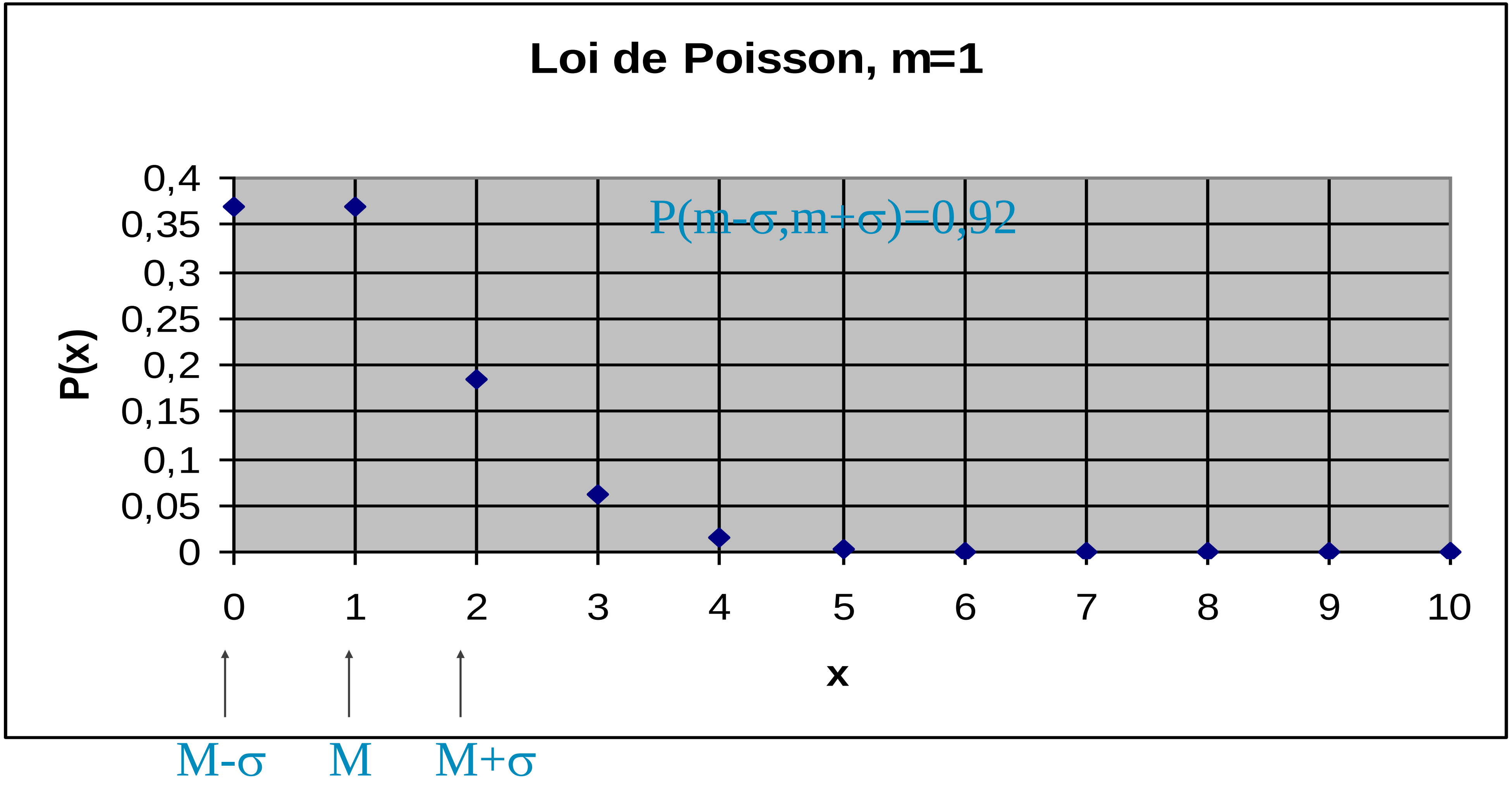




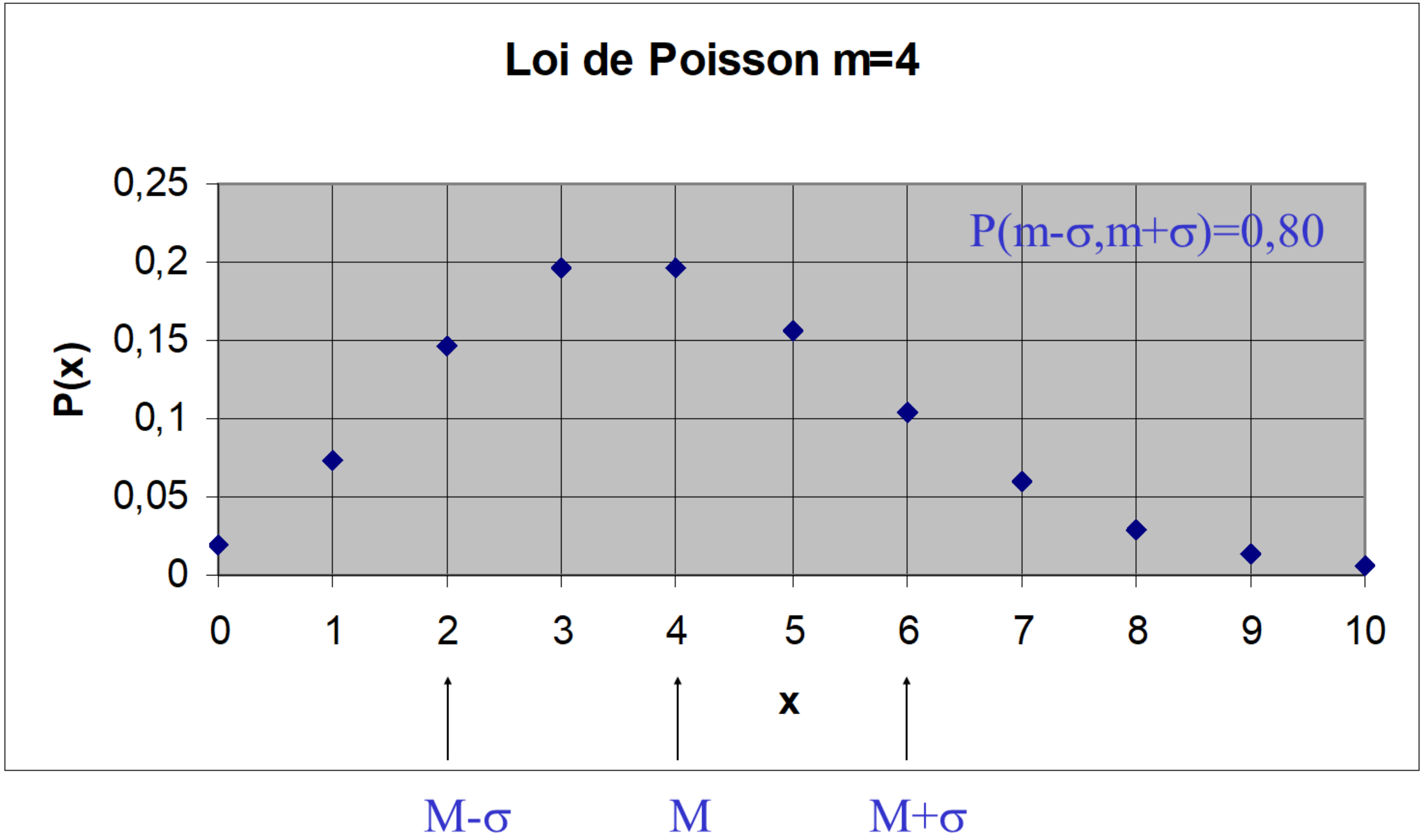




Exemple 3 : loi de Poisson



Exemple 3 : loi de Poisson



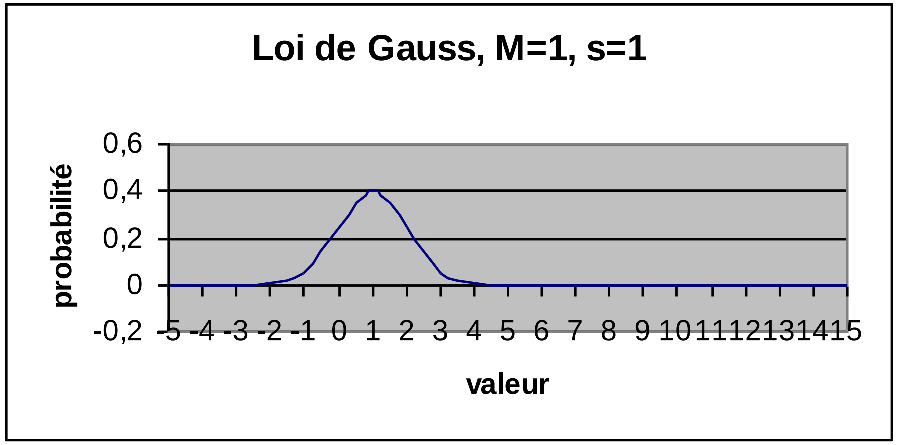
Exemple 4 :

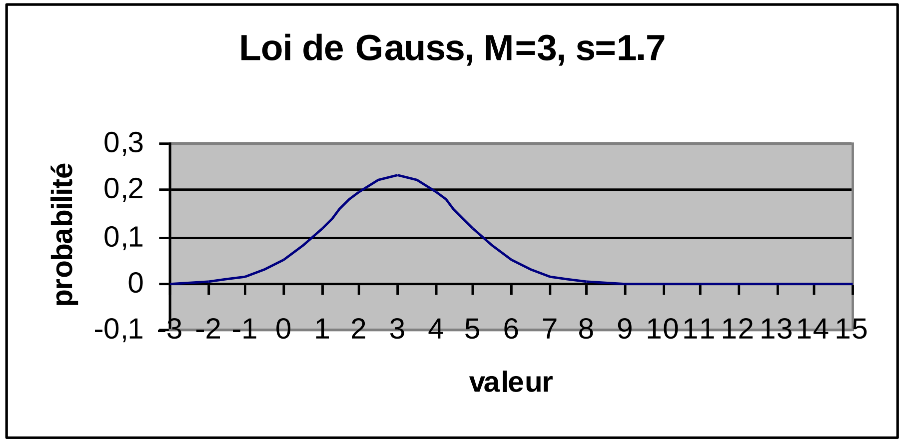
- Loi normale (Laplace Gauss)

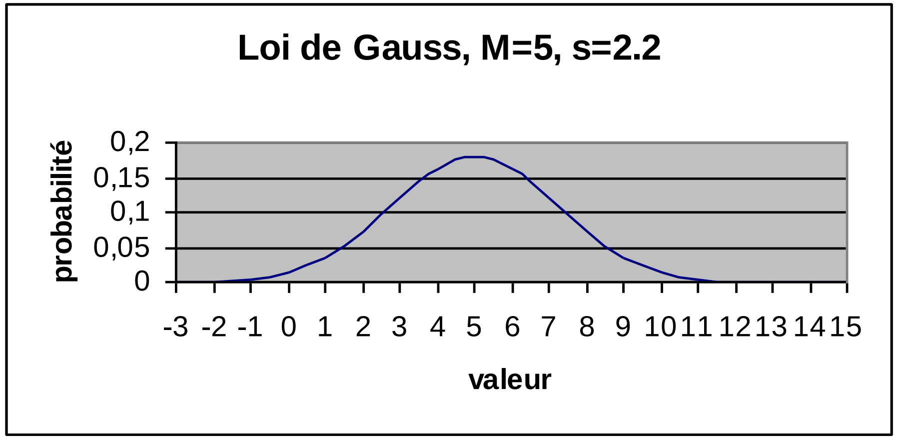
$$P(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-M)^2}{2s^2}}$$

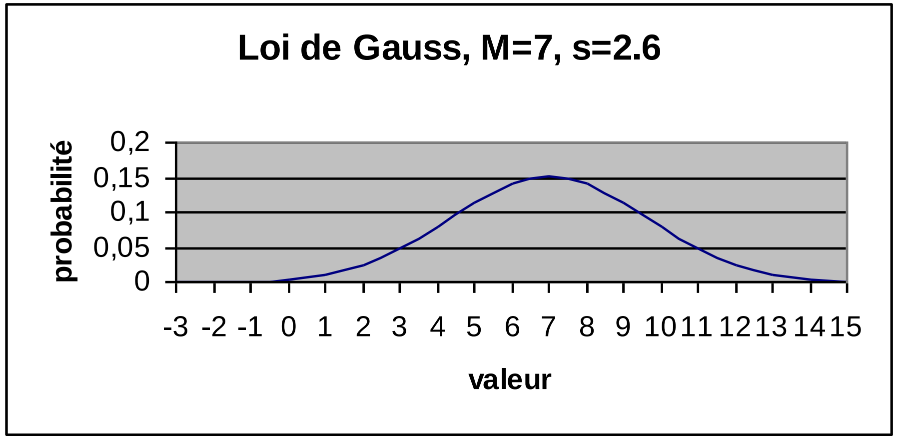
- P(x) est la probabilité d'obtenir la valeur x pour une valeur moyenne de M et un écart type s

Exemple 4 : Laplace Gauss

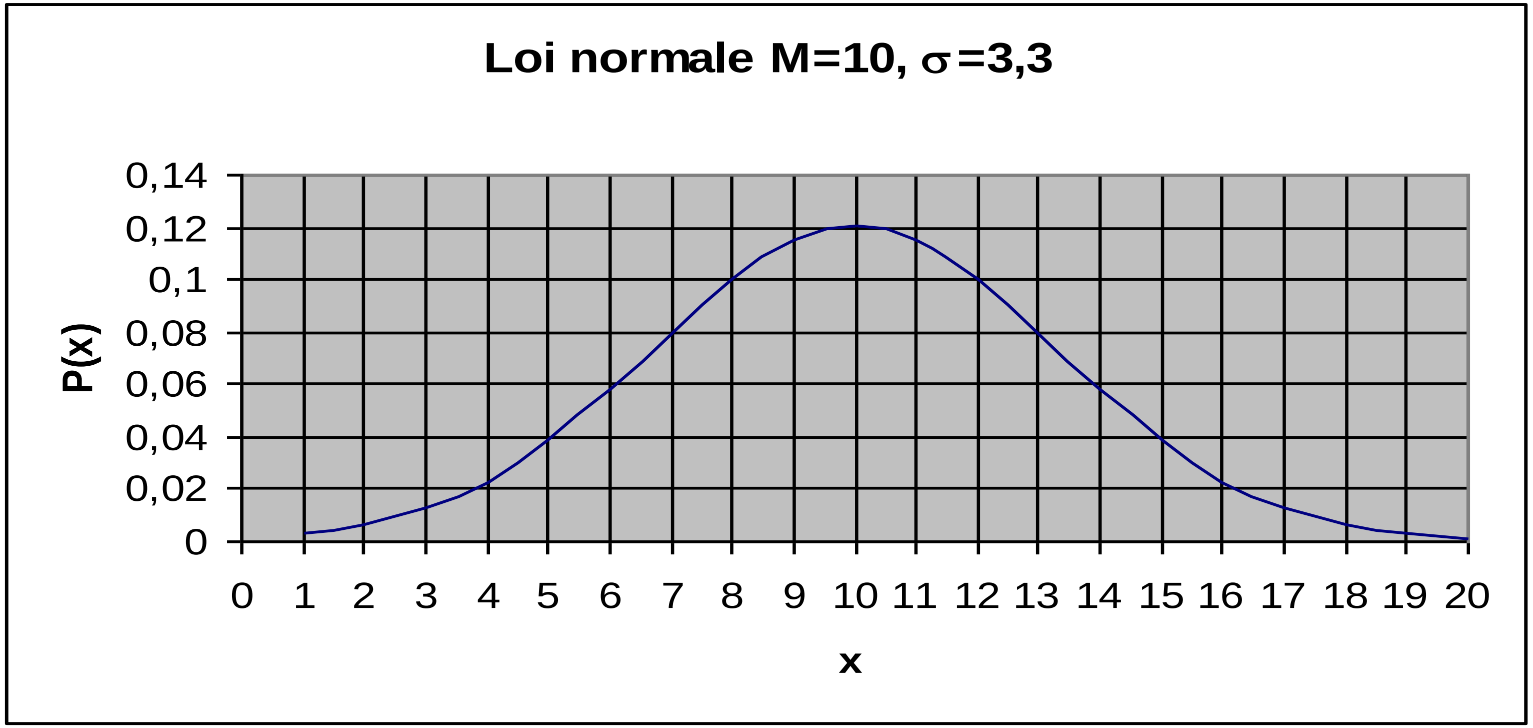






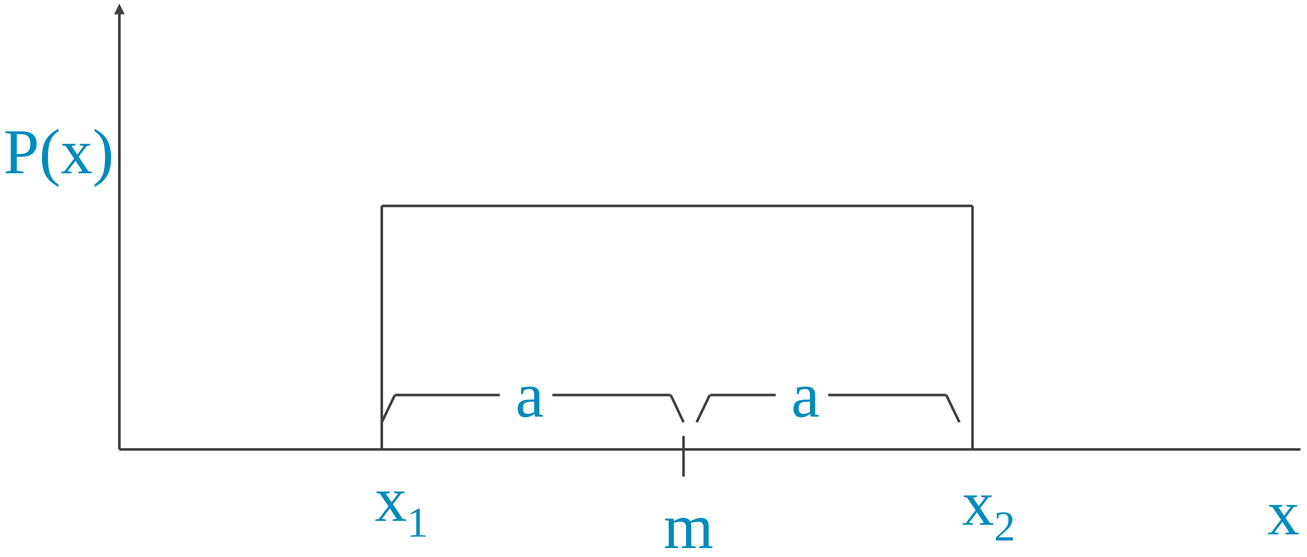


Exemple 4 : Laplace Gauss



- **Propriété importante :**
  - $P(M-s, M+s) = 0{,}68$
  - $P(M-2s, M+2s) = 0{,}95$
  - $P(M-3s, M+3s) = 0{,}99$

Exemple 5 : loi uniforme continue



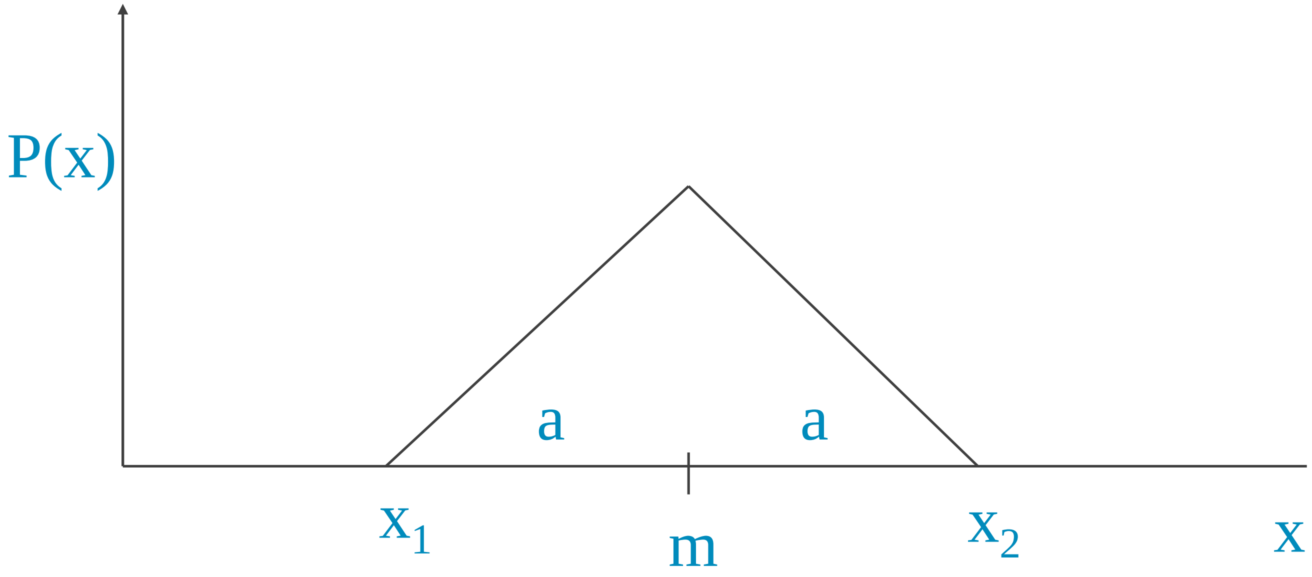
- Moyenne

$$m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

- Ecart-type

$$s = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Exemple 6 : loi triangulaire continue



- Moyenne $$m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$
- Ecart-type $$s = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

Une mesure

Peut-on associer une valeur probable à une série de mesures ?

- Comment la calculer ?

- Espérance mathématique

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i)$$

- Si toutes les mesures sont équiprobables

$$P(x_i) = \frac{1}{n}$$

- Espérance mathématique = moyenne

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Est-ce suffisant pour décrire la mesure ?

- **Non, il faut aussi donner une valeur indiquant la confiance que l'on a dans la mesure (ou la dispersion possible des résultats autour de la valeur la plus plausible) ;**

- **c'est l'incertitude...**

Elle est fondée sur l'écart type des valeurs

SI l'on peut répéter la mesure n fois

- On calcule la moyenne :

$$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- On calcul l'écart-type :

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - M)^2}$$

- On calcule l'écart type sur la moyenne si il s'agit de la même mesure :

$$s_M = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Méthode d'évaluation d'incertitudes de type A

Attention !

- L'écart-type (d'échantillon) indique la dispersion des mesures.
- Si l'on augmente le nombre de mesures, il ne varie pas notablement mais devient plus exact…

- L'écart type sur la moyenne indique la dispersion de l'évaluation de la moyenne.
- Si l'on augmente le nombre de mesures, il diminue car la moyenne est mieux connue…

Si l’on ne peut (veut) pas répéter la mesure

- On estime la valeur moyenne, M
- On estime son écart-type, s
- Si la mesure suit une loi de poisson :

$$s = \sqrt{M}$$

Méthode d’évaluation d’incertitude de type B

Mesurande : activité

- **Une mesure d’activité suit généralement une loi de Poisson**
- **On peut utiliser :**

$$s = \sqrt{M}$$

- **Pour :**
  - résultat d’un comptage brut (nombre d’impulsions pendant t)
  - somme de plusieurs comptages bruts
- **On ne doit pas utiliser cette formule pour :**
  - résultat net d’un comptage (bruit de fond déduit)
  - taux de comptage
  - moyenne de plusieurs comptages

Comment déterminer la valeur de l’écart type d’un paramètre ?

- **Principe du maximum d’entropie :**
  - Si l’on a qu’une estimation de la valeur du paramètre (λ) : loi exponentielle de moyenne λ, écart type $\sqrt{\lambda}$
  - Si l’on sait que la valeur du paramètre est comprise entre *a* et b : loi uniforme de moyenne (a+b)/2 et d’écart type (a-b)/√12

- **Cf. ISO/CIE Guide 98-3/Supplément 1 : 2008 (téléchargeable sur le site web du BIPM) : www.bipm.org**

Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" – Propagation of distributions using a Monte Carlo method

JCGM 101:2008

Évaluation des données de mesure – Supplément 1 du « Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure » – Propagation de distributions par une méthode de Monte Carlo

Incertitude

Incertitude-type composée

Une fonction dépendant de plusieurs variables

- En pratique, un résultat de mesure résulte d'une suite d'opérations pouvant chacune entraîner des incertitudes.
- Soit la relation fonctionnelle liant le résultat de mesure à ses composantes :

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

- Exemple : activité massique d'une solution radioactive :

$$y = f(taux\ de\ comptage, masse\ de\ solution, rendement\ de\ détection, \ldots)$$

- **En associant une incertitude à chaque composante, quelle est l'incertitude sur le résultat final ?**

Calculer l'incertitude-type composée

- La règle de combinaison des variances est utilisée pour calculer l'incertitude-type composée à partir des incertitudes-types $u(x_i)$ des paramètres x_i

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

- l'incertitude type composée est la racine positive de la variance composée donnée par :

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 \cdot u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot u(x_i, x_j)$$

Calculer l’incertitude-type composée

- Quand les x_i sont indépendants, le terme des "doubles produits " est nul :

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 \cdot u^2(x_i)}$$

- **L'incertitude type composée *$u_c(y)$* caractérise la dispersion des valeurs mesurées qui peuvent être raisonnablement attribuées au mesurande *y*.**

Cas simples

- **Somme et/ou différence : la fonction $y = x_1 + x_2 + x_3$ a pour variance :**

$$u_c^2(y) = u^2(x_1) + u^2(x_2) + u^2(x_3)$$

- **Produit et/ou quotient : la fonction $y=x_1x_2/x_3$ a pour variance :**

$$\frac{u_c^2(y)}{y^2} = \frac{u^2(x_1)}{x_1^2} + \frac{u^2(x_2)}{x_2^2} + \frac{u^2(x_3)}{x_3^2}$$

- **Facteur : la fonction $y = a.x$; a pour variance :**

$$u^2(y) = a^2 \cdot u^2(x)$$

Cas simples

- **Puissance : la fonction *y = x^p* ; a pour variance relative:**

$$\frac{u^2(y)}{y^2} = p^2 \cdot \frac{u^2(x)}{x^2}$$

- **Exponentielle :**
  - la fonction $y=e^x$ a pour variance relative:

$$\frac{u^2(y)}{y^2} = u^2(x)$$

  - La fonction $y=e^{a/x}$ a pour variance relative:

$$\frac{u^2(y)}{y^2} = \frac{a^2}{x^2} \times \frac{u^2(x)}{x^2}$$

Facteur d’élargissement k

- **Pour satisfaire aux besoins de quelques applications industrielles et commerciales, ainsi qu'aux demandes dans les domaines de la santé et de la sûreté, une incertitude élargie U peut être obtenue en multipliant l'incertitude type composée par un facteur d'élargissement *k*.**
- **L'utilité de U est de fournir un intervalle encadrant le résultat que l'on suppose contenir la majeure partie de la distribution des valeurs qui peuvent raisonnablement être attribuées au mesurande.**
- **Le choix de la valeur de *k*, qui est généralement comprise entre 2 et 3, dépend du niveau de confiance que l'on veut attribuer à cet intervalle.**

Incertitude de l'incertitude

- L'estimation de l'écart-type d'une distribution à l'aide de valeurs expérimentales est entachée d'incertitude.
- Le tableau ci-dessous donne cette incertitude relative en fonction du nombre d'observations pour une distribution gaussienne.

Nombre d'observations	Incertitude relative (%)
2	76
3	52
4	42
5	36
10	24
20	16
30	13
50	10

Notations

- Soit une activité de ^{222}Rn mesurée et calculée à 241,912543 Bq avec une incertitude-type calculée à 0,812208 Bq. Le résultat peut être exprimé de la façon suivante :
- L'incertitude-type :

$$A\left(^{222}Rn\right) = 241{,}9\ (8)\ Bq$$

- L'incertitude-type relative :

$$A\left(^{222}Rn\right) = 241{,}9\ Bq \text{ à } 0{,}33\ \%\ près$$

- L'incertitude absolue élargie :

$$A\left(^{222}Rn\right) = (241{,}9 \pm 1{,}6)\ Bq \text{ à } k = 2$$

- L'incertitude relative élargie :

$$A\left(^{222}Rn\right) = 241{,}9\ Bq \text{ à } 0{,}66\ \%\ près\ (k = 2)$$

Pour l'activité il faut bien mentionner la date de référence avec le fuseau horaire : 21/06/1987 à 9:00 TU

Remarque finale importante

- ***On doit accepter le fait que généralement l'incertitude est évaluée à partir de données plus ou moins bien connues et parfois subjectives. Il est admis que l'incertitude sur l'incertitude reste en général grande (en pratique 30 % en relatif)… et que cela suffit en pratique.***

- **Cela doit rendre pragmatique et justifier l'usage de nombreuses simplifications. Et parfois même (oh horreur !) à autoriser quelques libertés avec la rigueur mathématique…**

- **Il faut garder à l'esprit que l'incertitude d'un résultat de mesure est simplement l'expression du doute que l'on a sur ce résultat… L'important est d'exprimer correctement ce doute pour être compris (d'où l'intérêt de la démarche GUM)… mais les moyens d'évaluation peuvent-être divers et variés.**

Fin !