

Exemple: 3 couches UD 90/0/90 épaisseur $e_k = 1\text{mm}$

(4)

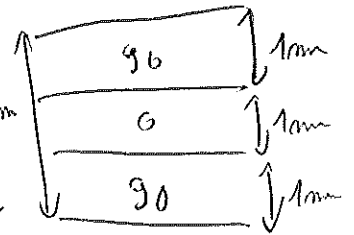
$$E_L = 45 \text{ GPa}$$

$$\nu_{LT} = 0,31$$

$$E_T = 10 \text{ GPa}$$

$$G_{LT} = 4,5 \text{ GPa}$$

$$h = 3\text{mm}$$



$$\alpha_L = 5 \cdot 10^{-6} / \text{K}$$

$$\alpha_T = 20 \cdot 10^{-6} / \text{K}$$

$$e = 1\text{mm} = \frac{h}{3}$$

Polymérisation faite à 120°C .

But: déterminer les contraintes résiduelles à 120°C .

On néglige la contraction due à la solidification (retrait chimique)

Rigidités: $[Q^0] = \begin{bmatrix} 45,98 & 3,17 & 0 \\ 3,17 & 10,22 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ (GPa)}$, $[Q^{90}] = \begin{bmatrix} 10,22 & 3,17 & 0 \\ 3,17 & 45,98 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

Déf. d'origine thermique

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{00}^{th} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_L \Delta T \\ \alpha_T \Delta T \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{90}^{th} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_L \Delta T \\ \alpha_T \Delta T \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \alpha_L \Delta T \\ \alpha_T \Delta T \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} = -0,05\% \\ = -0,2\% \end{matrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \alpha_T \Delta T \\ \alpha_L \Delta T \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[N^{th}] = e [Q_0] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{00}^{th} \end{Bmatrix} + 2e [Q_{90}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{90}^{th} \end{Bmatrix}$$

$$= e \Delta T \left(\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \\ & & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_L \\ \alpha_T \\ 0 \end{Bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{11} \\ & & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_T \\ \alpha_L \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

$$N_{xx}^{th} = e \Delta T \left[(Q_{11} + 2Q_{12}) \alpha_L + (2Q_{22} + Q_{12}) \alpha_T \right]$$

$$N_{yy}^{th} = e \Delta T \left[(2Q_{11} + Q_{12}) \alpha_L + (Q_{22} + 2Q_{12}) \alpha_T \right]$$

$$N_{xy}^{th} = 0$$

(3)

La symétrie du stratifié implique : $\{M\} = \{0\}$

A.N.:

$$N_{xx}^{th} = -73,37 \text{ N.mm}^{-1}$$

$$N_{yy}^{th} = -80,67 \text{ N.mm}^{-1}$$

$$N_{xy}^{th} = 0 \text{ N.mm}^{-1}$$

Calcul des déf. et courbures:

D'après la loi intégrée
$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_m \\ \gamma \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^{th} \\ M^{th} \end{Bmatrix}$$

On a
$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_m \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N^{th} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

avec $[B] = 0$ de par la symétrie du stratifié.

donc $[D][\gamma] = \{0\} \Rightarrow \{\gamma\} = \{0\}$: pas de courbure de la plaque!

$$[A] = e[Q_{01}^0] + 2e[Q_{20}^0] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \\ & & A_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66,4 & 9,5 \\ 9,5 & 102,2 \\ & & 27 \end{bmatrix} \text{ kN.mm}^{-1}$$

Equations:
$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \\ & & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \sqrt{2} \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{xy} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{12} & A_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \end{Bmatrix}$$

A.N:
$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = -0,10\% \\ \epsilon_{yy} = -0,0636\% \end{cases}$$

Contraintes dans les couches

(6)

à 0° :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sqrt{2}\sigma_{xy} \end{pmatrix}_{0^\circ} = \begin{bmatrix} Q_0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \epsilon_{xx} - \alpha_L \Delta T \\ \epsilon_{yy} - \alpha_T \Delta T \\ 0 \end{matrix}$$

$$\{\sigma\}_{0^\circ} = [Q_0] \left(\{\epsilon_m\} - \{\epsilon_{00}^{th}\}_{0^\circ} \right)$$

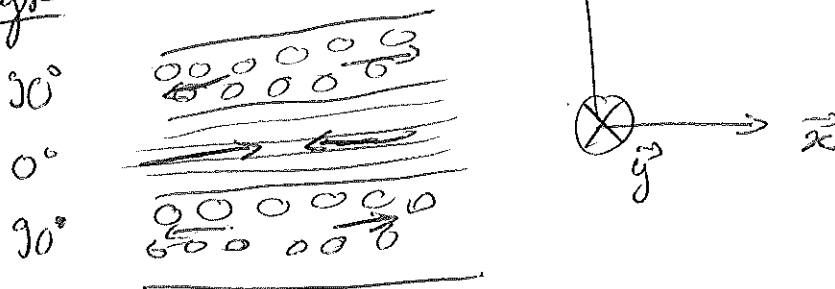
à 90° :

$$\{\sigma\}_{90^\circ} = [Q_{90}] \left(\{\epsilon_m\} - \{\epsilon_{90}^{th}\} \right)$$

A.N.:

$$\{\sigma\}_0 = \begin{Bmatrix} -19,1 \text{ MPa} \\ 11,7 \text{ MPa} \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad \{\sigma\}_{90} = \begin{Bmatrix} 9,54 \text{ MPa} \\ -5,86 \text{ MPa} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Analyse:



Selon $\vec{x}$: les couches externes se contractent plus que les couches internes: pli intérieur en compression, plus extérieurs en traction

Selon $\vec{y}$: phénomène opposé.

Rq: on a exactement $\{\sigma\}_0 + 2\{\sigma\}_{90} = \{0\}$
la stratifié est auto-équilibré: moyenne des contraintes nulle.