Modélisation des préférences

Modélisation et agrégation des préférences

Etude théorique de structures ordonnées permettant :

- de représenter les préférences des individus en tenant compte
  - des phénomènes d'imprécision
  - des phénomènes d'incertitude
  - des phénomènes de manque/redondance d'information

Caractérisation mathématique :

- de méthodes d'agrégation des préférences,
- théorie du choix social et procédures de vote

$\Rightarrow$ **Les préférences sont essentielles dans la vie.**
Présentation des concepts de base en modélisation des préférences, étape indispensable en aide à la décision.

Modélisation et agrégation des préférences

Exemple

Etant données deux actions de A, il est raisonnable de penser que le décideur est capable de dire

- s'il préfère l'une à l'autre
- ou s'il les considère comme équivalentes

C'est la base de la théorie de l'utilité de von Neumann et Morgenstern

Il existe cependant une autre éventualité et le décideur peut :

- être incapable de choisir entre les deux actions
- ou peut refuser de choisir entre les deux actions

$\Rightarrow$ **Notion d'incomparabilité**

Structure de préférence

Représentation des préférences du décideur par des relations binaires sur l'ensemble des actions A (ce qui sous-entend -hypothèse assez forte- que toutes les actions sont comparées deux à deux).

La plupart des travaux sur la modélisation des préférences considère (au moins) les trois relations suivantes définies dans A : la préférence, l'indifférence et l'incomparabilité.

Pour $a,\ b \in A$:

- aPb si a est préféré à b (on note aussi $a > b$) ;
- aIb s'il y a indifférence entre a et b (on note aussi $a = b$) ;
- aRb s'il y a incomparabilité.

Structure de préférence

Pour que ces relations traduisent des situations de préférence, d'indifférence et d'incomparabilité, il est naturel de supposer que :

$\forall a,\ b \in A$,

- P est **asymétrique** : $aPb \Rightarrow b \not{P} a$.

- I est **réflexive** : aIa.
- I est **symétrique** : $aIb \Rightarrow bIa$.

- R est **irréflexive** : $a \not{R} a$.
- R est **symétrique** : $aRb \Rightarrow bRa$.

Structure de préférence

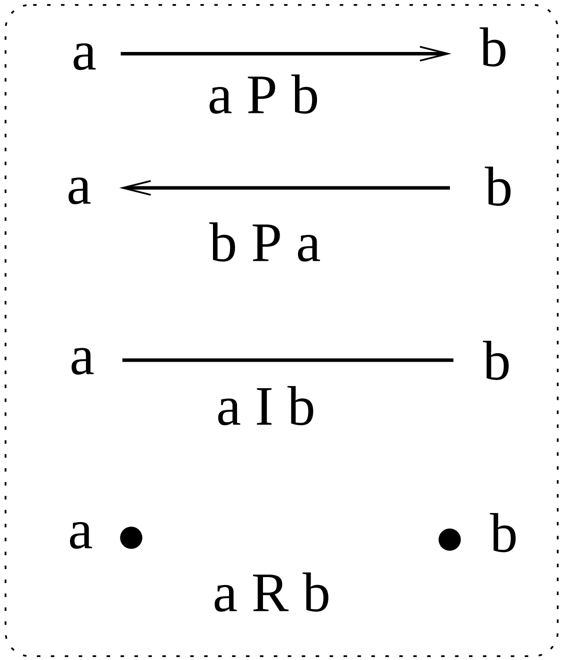
Les trois relations $\{P, I, R\}$ constituent une **structure de préférence** sur A si elles ont les propriétés ci-dessus et si, pour tout couple $(a, b) \in A^2$, une et une seule des relations suivantes est vérifiée :

aPb

bPa

aIb

aRb



Relation caractéristique

Toute structure de préférence peut être entièrement définie par la donnée de la **relation caractéristique** S :

$$aSb \text{ ssi } aPb \text{ ou } aIb \ (S = P \cup I)$$

On passe alors de la relation caractéristique à la structure de préférence à l'aide des formules suivantes :

$$\forall (a,b) \in A^2 \left| \begin{array}{l} aPb \text{ ssi } aSb \text{ } et \text{ } b \not S a \\ aIb \text{ ssi } aSb \text{ } et \text{ } bSa \\ aRb \text{ ssi } a \not S b \text{ } et \text{ } b \not S a \end{array} \right.$$

On peut représenter la relation caractéristique par un graphe orienté, où les sommets sont les éléments de A et les arêtes les couples (ordonnées) constituant la relation S.

Structure de préférence traditionnelle

L'approche traditionnelle consiste à ramener un problème de décision à l'optimisation d'une fonction g définie sur A. C'est la structure de préférence du modèle de l'utilité.

Les préférences du décideur vérifient le modèle traditionnel suivant (maximisation) :

$$\forall (a,b) \in A^2 \begin{cases} aPb \Leftrightarrow g(a) > g(b) \\ aIb \Leftrightarrow g(a) = g(b) \end{cases}$$

La structure de préférence induite a les propriétés suivantes :

- R est vide
- P est transitive
- I est transitive

Structure de préférence traditionnelle

A est fini ou dénombrable, R vide, P et I transitives $\Rightarrow$ il existe une fonction g vérifiant le modèle traditionnel.

Relation caractéristique S associée au modèle traditionnel :

$$\forall (a, b, c) \in A^3 \begin{cases} aSb \text{ ou } bSa \text{ (non exclusif) : S est complète} \\ aSb \; et \; bSc \Rightarrow aSc \text{ : S est transitive} \end{cases}$$

S est une **structure de préordre total** (relation réflexive, complète et transitive) :

- problématique de rangement P_γ (ranger les actions de la meilleure à la moins bonne)
- et si I se limite aux couples identiques, S est un **ordre total**

Structure de préférence traditionnelle

S est une **structure de préordre total** :

- I est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive)
- P est un *ordre faible* (asymétrique et négativement transitive) : $a \not P b$ *et* $b \not P c \Rightarrow a \not P c$
- la connaissance de P suffit à connaître la structure

Structure avec seuil d'indifférence

Nécessité de la prise en compte d'un seuil d'indifférence :

- comparaison entre deux actions faiblement différentes n'est pas toujours très tranchée
- transitivité de l'indifférence est incompatible avec l'existence d'un seuil de sensibilité en dessous duquel le décideur ne perçoit pas de différence entre deux actions soit refuse de se prononcer
- valeurs prises par les critères évaluant les actions sont de nature imprécise

Célèbre exemple de Luce : on peut aimer le thé sucré mais ne pas savoir faire la différence entre une tasse avec un morceau de sucre et une tasse avec un morceau et trois grains de sucre.

Structure avec seuil d'indifférence

Afin de modéliser ce seuil de sensibilité, on introduit un seuil d'indifférence q positif qui conduit la structure de préférence du décideur à vérifier le modèle à seuil suivant :

$$\forall (a,b) \in A^2 \begin{cases} aPb \Leftrightarrow g(a) > g(b) + q \\ aIb \Leftrightarrow |g(a) - g(b)| \leq q \end{cases}$$

Propriétés ($\forall a, b, c, d \in A$):

- $a \not{R} b$: R est vide
- $aPb,\ bIc,\ cPd \Rightarrow aPd$
- $aPb,\ bPc,\ aId \Rightarrow dPc$
- P est transitive

Structure avec seuil d'indifférence

A fini ou dénombrable, R vide, $aPb,\ bIc,\ cPd \Rightarrow aPd$
$aPb,\ bPc,\ aId \Rightarrow dPc]$ $\Rightarrow$ il existe g et q vérifiant le modèle à seuil.

La relation caractéristique S associée est :

$$\forall (a,b,c,d) \in A^4 \begin{cases} aSb \text{ ou } bSa : \text{S est complète} \\ aSb \; et \; cSd \Rightarrow aSd \text{ ou } cSb : \text{ S est de Ferrers} \\ aSb, bSc \Rightarrow aSd \text{ ou } dSc : \text{S est semi-transitive} \end{cases}$$

Une structure de préférence est une **structure de quasi-ordre** si elle est représentable par le modèle à seuil.