

Aide multicritère à la décision

Méthodes de surclassement

Considérations générales

Méthodes conduisant à un critère unique de synthèse

Utilité multiattribut ou encore la somme pondérée conduisent à une fonction qui permet de ranger toutes les actions de la meilleure à la moins bonne :

- elles produisent un résultat qui peut sembler très confortable pour le décideur
- elles exigent des hypothèses importantes (commensurabilité entre les critères, fonction additive, etc.)

Considérations générales

Concept de surclassement

Remarques :

- action a est meilleure que les actions b et c , doit-on connaître la relation entre b et c ?
 - la résolution d'un problème de décision est un processus temporel, où les actions peuvent être incomparables à un moment donné
 - conclure à l'incomparabilité de deux actions peut mener à étudier de nouveaux aspects du problème
 - additivité entre les critères est-elle une hypothèse raisonnable ?
 - la commensurabilité entre les critères peut être difficile à obtenir
- ⇒ **B. Roy (1985) a introduit le concept de surclassement.**

Relation de surclassement

Définition :

Une relation de surclassement est une **relation binaire** S définie dans A telle que aSb si, étant donné ce que l'on sait des **préférences du décideur** et étant données la **qualité des évaluations des actions** et la **nature du problème**, il y a suffisamment d'arguments pour admettre que a est **au moins aussi bonne** que b , sans qu'il y ait de raison importante de **refuser cette affirmation**.

⇒ **Si a surclasse b alors a est au moins aussi bonne que b .**

Relation de surclassement

Observations :

- différences entre les méthodes de surclassement vont provenir notamment de la façon de formaliser cette définition
- une relation de surclassement n'a aucune raison d'être complète ni transitive et en particulier elle ne permet pas en général d'obtenir immédiatement un rangement total des actions

Deux étapes :

- construction de la relation de surclassement ;
- exploitation de la relation de surclassement en fonction de la problématique choisie.

⇒ Méthodes ELECTRE

ELicitation Et Choix Traduisant la REalité.

Méthodes ELECTRE

Deux notions :

- la concordance : mesurer les arguments en faveur de **au moins aussi bonne**
- la discordance : mesurer s'il y a des raisons importantes de **refuser cette affirmation**

Prises en compte :

- de logiques non compensatoires
- de notion de veto

⇒ **Exprimer le surclassement (ou non)**
d'une action a sur une action b .

ELECTRE I

Problématique

Problème du choix :

- obtenir le plus petit sous-ensemble N de A tel que toute action qui n'est pas dans N est surclassée par au moins une action de N
- et tel que les actions de N soient incomparables entre elles

Formellement :

$\forall a, b \in A$ trouver N tel que

$$N \subseteq A, \forall b \notin N, \exists a \in N, aSb$$

$$\forall a \in N, \forall b \in N, a \not S b$$

ELECTRE I

Construction de la méthode de surclassement

Indice de concordance $c(a, b) : \forall a, b \in A$

$$c(a, b) = \frac{1}{\sum_{j=1}^p p_j} \sum_{j/g_j(a) \geq g_j(b)} p_j$$

- varie de 0 à 1 (normalisation des poids)
- mesure les arguments en faveur de l'affirmation “ a surclasse b ”
- correspond à une procédure où chaque groupe de votants (mesuré par son importance) exprime sa préférence de a sur b .
- ne nécessite pas la comparabilité entre les critères (comparaisons critère par critère)

ELECTRE I

Construction de la méthode de surclassement

Indice de discordance $d(a, b)$ (critères quantitatifs et comparables) :

$$d(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{si } \forall j, g_j(a) \geq g_j(b), \\ \frac{1}{\delta} \max_j [g_j(b) - g_j(a)], & \text{sinon ; où } \delta = \max_{c,d,j} [g_j(c) - g_j(d)] \end{cases}$$

- mesure la force d'un argument (maximal) en défaveur de a est au moins aussi bonne que b
- exprime le fait que le décideur ne peut accepter la préférence de a sur b si b est (très) largement meilleure que a sur un critère (quel que soit le nombre de critères en faveur de a sur b)
- indice $d(a, b)$ est donc d'autant plus grand que la préférence de a sur b est faible sur un critère

ELECTRE I

Construction de la méthode de surclassement

Discordance $d(a, b)$ (critères non comparables) :

- ensembles de contraintes D_j de la forme $\{ (=, x_j, y_j) \}$,
 $\{ (\leq, x_j, y_j) \}$,
- ou plus généralement $\{ (R, x_j, y_j) \}$ ou R est une relation binaire exprimant des contraintes

Par exemple, l'ensemble $\{ (=, x_2, y_2) \}$ signifie que sur le critère 2 si $g_2(a) = x_2$ et $g_2(b) = y_2$ on refusera le surclassement de b par a , et ce quel que soient les arguments en faveur de a sur b .

\Rightarrow Discordance exprime la notion de véto.

ELECTRE I

Construction de la méthode de surclassement

Définition de la relation de surclassement S :

- à l'aide de la concordance
à partir d'un seuil \hat{c}
ie. qu'il y a suffisamment d'arguments en faveur de a
- et de la discordance
soit à partir d'un seuil \hat{d} si les critères sont commensurables
ou bien à partir des ensembles de contraintes
ie. qu'il n'y a pas assez d'arguments contre le surclassement

ELECTRE I

Construction de la méthode de surclassement

Définition la relation de surclassement S :

$$aSb \iff \begin{cases} c(a, b) \geq \hat{c} \\ d(a, b) \leq \hat{d} \end{cases}$$

ou par

$$aSb \iff \begin{cases} c(a, b) \geq \hat{c} \\ \forall j (R, g_j(a), g_j(b)) \notin D_j \end{cases}$$

ELECTRE I

Exploitation de la relation de surclassement

Problématique - on recherche un sous-ensemble N tel que :

$$\begin{cases} \forall b \in A \setminus N, \exists a \in N \text{ tel que } aSb \\ \forall (a, b) \in N^2, a \not S b \end{cases}$$

- première condition est une propriété de complétude
- la seconde de minimalité.

\Rightarrow La recherche de N est équivalente à la recherche du noyau du graphe G représentant S .

ELECTRE I

Exploitation de la relation de surclassement

Théorème 1 *Si le graphe G est sans circuit alors le noyau N existe et est unique.*

Sinon le noyau n'est pas unique :

- on peut considérer les actions des circuits comme ex æquo et remplacer chaque circuit par une action unique
- on peut utiliser la notion de quasi-noyau de faiblesse minimum

ELECTRE I

Exploitation de la relation de surclassement

Un quasi-noyau Q d'un graphe $G = (X, U)$ est un sous-ensemble de X tel que (G étant le graphe de de surclassement de S , $(a, b) \notin U$ est noté $a \not S b$ et X est remplacé par A) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (a, b) \in Q^2, a \not S b \\ \forall b \notin Q \left\{ \begin{array}{l} \exists a \in Q \text{ tel que } a S b \\ \text{ou } \exists a \in A \text{ et } c \in Q \text{ tel que } a S b \text{ et } c S a \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Tout graphe possède au moins un quasi-noyau.

La faiblesse de Q est définie par :

$$f(Q) = |\{b \in A \setminus Q \text{ tel que } \nexists a \in Q a S b\}|$$

Le quasi-noyau Q est un noyau si et seulement si $f(Q) = 0$.

ELECTRE I

Exemple

Choix d'une voiture (sept modèles, quatre critères) :

	1	2	3	4	5	6	7	Poids
Prix	300	250	250	200	200	200	100	5
Confort	E	E	M	M	M	F	F	4
Vitesse	R	M	R	R	M	R	M	3
Ligne	S	S	S	O	S	S	O	3

où (E = Excellent, M = Moyen, F = Faible, R = Rapide, S = Soignée, O = Ordinaire)

ELECTRE I

Exemple

Les indicateurs de concordance sont :

	-	10	10	10	10	10	10
12	12	-	12	7	10	7	10
11	11	11	-	10	10	10	10
1/15 *	8	8	12	-	12	12	10
	8	11	12	12	-	12	10
	11	11	11	11	11	-	10
	5	8	5	8	8	9	-

ELECTRE I

Exemple

On refuse le surclassement de b par a si :

- $g_{prix}(a) = 300$ et $g_{prix}(b) = 100$ **ou**
- $g_{prix}(a) = 250$ et $g_{prix}(b) = 100$ **ou**
- $g_{confort}(a) = F$ et $g_{confort}(b) = E$.

Pour $\hat{c} = \frac{12}{15}$, on obtient la relation de surclassement représentée par le graphe de la figure 1.

ELECTRE I

Exemple

Les noyaux du graphe sont les sous-ensembles $\{2, 4, 7\}$ et $\{2, 5, 7\}$.
Les actions 4 et 5 peuvent être considérées comme ex æquo.

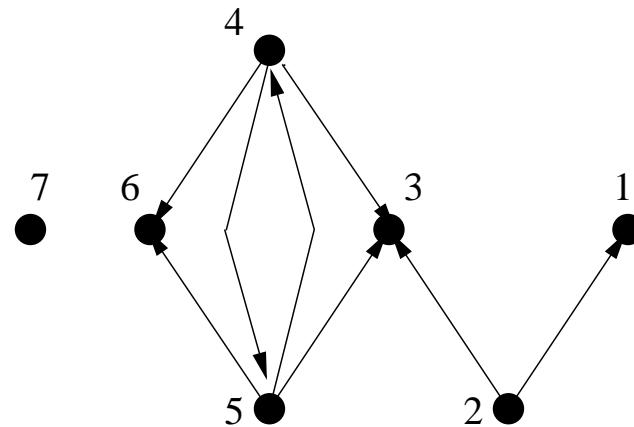


Figure 1: surclassement du choix d'une voiture.

ELECTRE I

Test de robustesse

Les actions du noyau sont les *bonnes actions*.

On doit donc les analyser en finesse et plus précisément tester la robustesse du noyau en faisant varier les paramètres de la méthode :

- p_i
- \hat{c}
- \hat{d}

Cette dernière phase peut servir à départager les actions du noyau.