

Aide Multicritère à la Décision

Théorie du Choix Social

Philippe LERAY

`philippe.leray@univ-nantes.fr`

DUKe (Data User Knowledge) Research group
Laboratoire des Sciences du Numérique de Nantes – UMR 6004
Site de l'Ecole Polytechnique de l'université de Nantes



Théorie du choix social

Problème

- élection : un groupe de personnes doivent choisir un candidat parmi plusieurs
- chaque personne classe les candidats par ordre de préférence
- quel candidat doit être élu ?

Analogie avec les modèles multi-critères

- candidats \iff actions
- électeurs \iff critères

Cette présentation s'inspire des cours de B. Mareschal (Méthodes d'Aide à la Décision – Université Libre de Bruxelles) et de P. Lenca (ENST Bretagne)

Procédures de vote

Quelle procédure de vote choisir ?

5 exemples de procédures

- Majorité relative
- Condorcet
- Scrutin à 2 tours
- Borda
- Eliminations successives

Majorité relative : exemple

Contexte

- 3 candidats : **A**lbert, **B**runo, **C**laire
- 30 votants

Dépouillement des votes

- 11 votants donnent le classement A, B, C
- 10 votants donnent le classement B, C, A
- 9 votants donnent le classement C, B, A

Résultat du vote

Albert est élu

Majorité relative : problème

Dictature de la majorité

- 11 votants donnent le classement A, B, C
- 10 votants donnent le classement B, C, \mathbf{A}
- 9 votants donnent le classement C, B, \mathbf{A}

- (B ou C) sont préférés à A 19 fois sur 30 !!!

Condorcet



Principe

Un candidat X est un gagnant de Condorcet si pour tout autre candidat Y , X est majoritairement préféré à Y en restreignant le problème de choix à ces deux candidats.

Condorcet : exemple

Dépouillement des votes

- 11 votants donnent le classement A, B, C
- 10 votants donnent le classement B, C, A
- 9 votants donnent le classement C, B, A

Interprétation

- **19 votants disent que B est meilleur que A**
- **21 votants disent que B est meilleur que C**
- 19 votants disent que C est meilleur que A

Résultat du vote

Bruno est élu

Condorcet : paradoxe

Dépouillement des votes

- 4 votants donnent le classement A, B, C
- 3 votants donnent le classement B, C, A
- 2 votants donnent le classement $C, \mathbf{A}, \mathbf{B}$

Interprétation

- 6 votants disent que A est meilleur que B
- 7 votants disent que B est meilleur que C
- 5 votants disent que C est meilleur que A

Résultat du vote

Pas d'élu

Scrutin à deux tours

Contexte

- 4 candidats : **A**lbert, **B**runo, **C**laire, **D**iane

Dépouillement des votes (63 votants)

- 22 votants donnent le classement **B**, **A**, **C**, **D**
- 21 votants donnent le classement **C**, **A**, **D**, **B**
- 20 votants donnent le classement **D**, **A**, **C**, **B**

Interprétation

- 1er tour : **B** et **C** sont retenus
- 2ème tour : 41 votants préfèrent **C** à **B** contre 22

Résultat du vote

Claire est élue

Scrutin à deux tours

Dépouillement des votes (63 votants)

- 22 votants donnent le classement B, A, C, D
- 21 votants donnent le classement C, A, D, B
- 20 votants donnent le classement D, A, C, B

Résultat du vote

Claire est élue

Et pourtant ...

- 42 votants disent que A est meilleur que C
- 41 votants disent que A est meilleur que B
- 43 votants disent que A est meilleur que D

La méthode n'est pas cohérente avec la procédure de Condorcet !

Scrutin à deux tours

Dépouillement des votes (17 votants)

- 5 votants donnent le classement C, A, B
- 6 votants donnent le classement A, B, C
- 4 votants donnent le classement B, C, A
- 2 votants donnent le classement B, A, C

Interprétation

- 1er tour : $A(6)$ et $B(6)$ sont retenus
- 2ème tour : 11 votants préfèrent A à B contre 6

Résultat du vote

Albert est élu

Scrutin à deux tours

Et pourtant ...

- 5 votants donnent le classement C, A, B
- 6 votants donnent le classement A, B, C
- 4 votants donnent le classement B, C, A
- 2 votants donnent le classement A, B, C (au lieu de B, A, C)

Interprétation

- 1er tour : $A(8)$ et $C(5)$ sont retenus
- 2ème tour : 9 votants préfèrent C à A contre 8

Résultat du vote

Claire est élue

Scrutin à deux tours

Inconvénients

- Non monotonicité
- Parfois préférable de s'abstenir de voter pour faire élire son candidat !
- Non séparabilité

Borda



Principe

- donner des points en fonction de la place accordée
- ex: pour 3 candidats, 2 points si mis en 1er, 1 point si mis en 2eme, et 0 si mis en dernier

Borda - exemple 1

Dépouillement des votes (81 votants)

- 30 votants donnent le classement A, C, B
- 29 votants donnent le classement C, A, B
- 10 votants donnent le classement C, B, A
- 10 votants donnent le classement B, A, C
- 1 votant donne le classement A, B, C
- 1 votant donne le classement B, C, A

Interprétation

- A marque $31 \cdot 2 + 39 \cdot 1 = 101$
- B marque $11 \cdot 2 + 11 \cdot 1 = 33$
- C marque $39 \cdot 2 + 31 \cdot 1 = 109$

Claire est élue

Borda - exemple 1

Dépouillement des votes (81 votants)

- 30 votants donnent le classement A, C, B
- 29 votants donnent le classement C, A, B
- 10 votants donnent le classement C, B, A
- 10 votants donnent le classement B, A, C
- 1 votant donne le classement A, B, C
- 1 votant donne le classement B, C, A

Résultat du vote

Claire est élue

Et pourtant

- A est meilleur que C pour 41 votants sur 81 !

Borda - exemple 2

Dépouillement des votes (7 votants)

- 3 votants donnent le classement C, B, A, D
- 2 votants donnent le classement B, A, D, C
- 2 votants donnent le classement A, D, C, B

Interprétation

- A marque $2*3 + 2*2 + 3*1 = 13$
- B marque $2*3 + 3*2 + 0*1 = 12$
- C marque $3*3 + 0*2 + 2*1 = 11$
- D marque $0*3 + 2*2 + 2*1 = 6$

Albert est élu

Borda - exemple 2

Mais Diane se désiste au moment du vote

Dépouillement des votes (7 votants)

- 3 votants donnent le classement C, B, A
- 2 votants donnent le classement B, A, C
- 2 votants donnent le classement A, C, B

Interprétation

- A marque $2*2 + 2*1 = 6$
- B marque $2*2 + 3*1 = 7$
- C marque $3*2 + 2*1 = 8$

Claire est élue !

Borda - exemple 3

Dépouillement des votes (34 votants)

- 12 votants donnent le classement A, B, C
- 12 votants donnent le classement B, A, C
- 10 votants donnent le classement C, A, B

Interprétation

- A marque $12 \cdot 2 + 22 \cdot 1 = 46$
- B marque $12 \cdot 2 + 12 \cdot 1 = 36$
- C marque $10 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 20$

Albert est élu

Borda - exemple 3

Les partisans de Bruno suscitent la candidature bidon de Mr. X, et le placent en 2ème dans leurs préférences...

Dépouillement des votes (34 votants)

- 12 votants donnent le classement A, B, C, X
- 12 votants donnent le classement B, X, A, C
- 10 votants donnent le classement C, A, B, X

Interprétation

- A marque $12 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 12 \cdot 1 = 68$
- B marque $12 \cdot 3 + 12 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = 70$
- C marque $10 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 12 \cdot 1 = 42$
- X marque $0 \cdot 3 + 12 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 24$

Bruno est élu

Borda - exemple 3b

Les dangers de la manipulation : et si tout le monde avait voté X en second ???

Dépouillement des votes (34 votants)

- 12 votants donnent le classement A, X, B, C
- 12 votants donnent le classement B, X, A, C
- 10 votants donnent le classement C, X, A, B

Interprétation

- A marque $12*3 + 0*2 + 22*1 = 56$
- B marque $12*3 + 0*2 + 12*1 = 48$
- C marque $10*3 + 0*2 + 0*1 = 30$
- X marque $0*3 + 34*2 + 0*3 = 68$

X est élu !!!

tel est pris

Eliminations successives

Principe

- procédure par tours
- à chaque tour, on élimine le moins bon
- le dernier en lice a gagné

Conclusion

Dépouillement des votes (25 votants)

- 8 votants donnent le classement A, C, D, B, E
- 7 votants donnent le classement B, D, C, E, A
- 4 votants donnent le classement E, C, D, B, A
- 4 votants donnent le classement D, E, B, C, A
- 2 votants donnent le classement C, E, D, B, A

Résultat :

tout le monde gagne :-)

- | | |
|----------------------------|--------|
| ● Majorité relative | Albert |
| ● Scrutin à 2 tours | Bruno |
| ● Condorcet | Claire |
| ● Borda | Diane |
| ● Eliminations successives | Eric |

K. Arrow, Nobel d'Economie 1972

Théorème d'impossibilité

Avec au moins 2 votants et 3 candidats, il est **impossible** de construire une procédure de vote satisfaisant simultanément les 5 propriétés suivantes :

- universalité : la relation de préférence des votants peut être donnée par n'importe quel pré-ordre complet
- indépendance vis à vis des tiers : le résultat ne doit pas dépendre de la disparition d'un candidat
- unanimité : A gagne si tout le monde préfère A à B pour tout B (Pareto)
- non dictature : il n'existe pas d'individu dictant ses préférences à la collectivité
- transitivité de la relation de préférence

Conclusion

Remarques

- Majorité : optimale pour 2 candidats
- Borda : satisfait tout SAUF indépendance
- Condorcet : satisfait tout SAUF transitivité

Théorème de Moulin (1998)

Pour au moins 4 candidats, et suffisamment de votants, tout mode de scrutin choisissant le vainqueur de Condorcet est sujet au paradoxe de l'abstention

Théorème de Gibbard et Satterthwaite (1973)

Quand il y a au moins trois candidats, toute méthode sans dictateur est manipulable

C'est fini

