Analyse de Données – ID

Philippe LERAY
philippe.leray@univ-nantes.fr

Equipe COnnaissances et Décision
Laboratoire d'Informatique de Nantes Atlantique – FRE 2729
Site de l'Ecole Polytechnique de l'université de Nantes

Polytech'Nantes
École d'ingénieurs de l'université de Nantes

UNIVERSITÉ DE NANTES

lina LABORATOIRE D'INFORMATIQUE DE NANTES ATLANTIQUE

Application linéaire

Définition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. et soit une application $f : E \to F$.
f est une *application linéaire* ssi $\forall x, y \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,
$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$.

Notations

On note :

- $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
- $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E, appelées aussi *endomorphismes* de E.
- E^* l'ensemble des applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$.

Propriétés des applications linéaires

Propriétés

- $\{x \in E | f(x) = 0_F\}$ est un espace vectoriel, appellé le *noyau* de f et noté $Kerf$.
- $\{y \in F | \exists x \in E : y = f(x)\}$ est un espace vectoriel, appellé l'*image* de f et noté Imf.
- Le rang de f, noté $rg(f)$, est la dimension de l'e.v. Imf.

Propriétés des applications linéaires

Proposition

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimensions finies et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$:

- $Kerf = \{0_E\} \iff f$ est injective.
- $Imf = F \iff f$ est surjective.
- **Théorème du rang :** $dim(Kerf) + rg(f) = \dim E$
- si $\dim E = \dim F$ alors f surjective $\iff$ f injective $\iff$ f bijective.

Matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimensions respectives p et n et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $B_E = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et soit B_F une base de F.

Proposition

L'application linéaire f est totalement déterminée par la donnée des composantes des vecteurs $f(e_1), \ldots, f(e_p)$ dans la base B_F.

Définition

Les composantes des vecteurs $f(e_1), \ldots, f(e_p)$ relativement à la base B_F peuvent se ranger sous la forme d'un tableau de n lignes et p colonnes appelé *matrice de l'application linéaire f relativement aux bases B_E et B_F* dont la j-ème colonne est formée des n composantes du vecteur $f(e_j)$ dans la base B_F.
Cette matrice est notée $Mat(f, B_E, B_F)$.

Matrice d'une application linéaire

Exercices