# Analyse de Données – ID

Philippe LERAY
philippe.leray@univ-nantes.fr

Equipe COnnaissances et Décision
Laboratoire d'Informatique de Nantes Atlantique – FRE 2729
Site de l'Ecole Polytechnique de l'université de Nantes

# Matrices sur $\mathbb{K}$

## Définition

Soient $n$ et $p$ deux entiers non nuls. On appelle *matrice* à $n$ lignes et $p$ colonnes sur un corps $\mathbb{K}$, toute famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $\{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, p\}$.

## Notations

- L'ensemble des matrices à $n$ lignes et $p$ colonnes sur $\mathbb{K}$ se note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et est aussi appelé l'ensemble des matrices d'ordre $n \times p$ sur $\mathbb{K}$.
- Si $n = p$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ se note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et ses éléments sont appelés matrices carrées d'ordre $n$ sur $\mathbb{K}$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \{1,\ldots,n\} \\ j \in \{1,\ldots,p\}}}$ la matrice de terme général $a_{ij}$.

# Opérations sur les matrices

## Propriétés

- Transposition (la transposée d'une matrice $A$ sera notée $A'$)
- Addition
- Multiplication d'une matrice par un scalaire
- Multiplication de 2 matrices (non commutatif en général)

## Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $A$ est dite *symétrique* si $A = A'$.

## Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'*inverse* de $A$, lorsqu'elle existe, est la matrice unique notée $A^{-1}$ telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

# Notations matricielles

Soient

- $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension respective $p$ et $n$,
- $f \in \mathcal{L}(E, F)$,
- $B_E$ une base de $E$, $B_F$ une base de $F$.
- $x$ un vecteur de $E$ dont les composantes dans la base $B_E$ sont $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$.

En notation matricielle, relativement à la base $B_E$, le vecteur $x$ est noté $(\alpha_1 \ldots \alpha_p)'$.
La notation matricielle du vecteur $f(x) \in F$, relativement à la base $B_F$ peut être obtenue en calculant $Ax$ où $A = Mat(f, B_E, B_F)$.

# Notations matricielles

## Proposition

Soient

- $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie,
- $B$ une base de $E$
- $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

Notons $A = Mat(f, B, B)$ et $B = Mat(g, B, B)$.

Alors $Mat(f \circ g, B, B) = AB$.

Si $f$ est bijective alors $Mat(f^{-1}, B, B) = A^{-1}$.

# Changement de base

**Définition**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $B_1$ et $B_2$ deux bases de $E$.
On appelle *matrice de passage* de la base $B_1$ à la base $B_2$, la matrice $P_{B_1,B_2}$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs de $B_2$ dans la base $B_1$.

$$P_{B_1,B_2} = Mat(Id, B_2, B_1).$$

**Proposition**

Une matrice de passage est toujours inversible.

$Mat(Id, B_2, B_1) = Mat(Id, B_1, B_2)^{-1}$ donc
$P_{B_1,B_2}^{-1} = Mat(Id, B_1, B_2) = P_{B_2,B_1}$

# Matrices semblables

**Proposition**

Soit $x \in E$ de composantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans la base $B_1$. En notation matricielle, les composantes de $x$ dans la base $B_2$ sont données par $P_{B_1,B_2}^{-1} x = Mat(Id, B_1, B_2)x$.

**Proposition**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, soient $B_1$ et $B_2$ deux bases de $E$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors,
$Mat(f, B_1, B_1) = Mat(Id, B_2, B_1)Mat(f, B_2, B_2)Mat(Id, B_1, B_2)$.

**Définition**

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $A$ et $B$ sont dites *semblables* s'il existe $P$ inversible telle que $A = P^{-1}BP$.

# Rang

**Définition**

Le rang d'une matrice est le nombre maximal de vecteurs colonnes linéairement indépendants. Ce nombre est le même pour toute matrice semblable.

# Déterminant, trace

## Rappels sur le déterminant et la trace

La *trace* et le *déterminant* sont des notions intrinsèques, qui ne dépendent pas des bases de représentations choisies.
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $A = (a_{ij})$. Alors,

- $Trace(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$,
- $Trace(\lambda) = \lambda$ et $Trace(\lambda A) = \lambda Trace(A)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,
- $Trace(A + B) = Trace(A) + Trace(B)$
- $Trace(AB) = Trace(BA)$ ($A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$).
- $\det(A) \neq 0 \iff A$ est inversible $\iff A$ est de rang $n$,
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
- Si $A$ et $B$ sont semblables, alors $\det(A) = \det(B)$.

# Définitions

Soit $E$ un $K$-e.v. et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

## Valeur propre

$\lambda \in \mathbb{K}$ est *valeur propre* (val.p) de $f$ s'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f(x) = \lambda x$.

## Espace propre

$E_f(\lambda) = \{x \in E, x \neq O_E | f(x) = \lambda x\}$ est l'*espace propre* associé à la val.p $\lambda$ de $f$.

## Vecteur propre

tout vecteur de $E_f(\lambda)$ est appelé *vecteur propre* associé à la val.p $\lambda$.

## Spectre

Le spectre de $f$, noté $Spec(f)$, est l'ensemble des val.p de $f$.

# Propriétés

**Proposition**

Soit $x \in E$.
$x$ est vecteur propre de $f$ ssi $x \neq 0_E$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda x$.

**Proposition**

Soient $x_1, \ldots, x_p$ $p$ vecteurs propres associés aux $p$ valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.
La famille $x_1, \ldots, x_p$ est une famille libre.

# Diagonalisation

**Définition**

On dit que l'application linéaire $f$ (ou la matrice $A$) est diagonalisable si $E$ possède une base de vecteurs propres de $f$ (ou de $A$). Cette base est appelée *base propre*.

**Proposition**

Une matrice symétrique réelle est toujours diagonalisable.