Analyse de Données – ID

Philippe LERAY
philippe.leray@univ-nantes.fr

Equipe COnnaissances et Décision
Laboratoire d'Informatique de Nantes Atlantique – FRE 2729
Site de l'Ecole Polytechnique de l'université de Nantes

Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v.

Définition

Soit $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que l'application B est un *produit scalaire* si :

- **i.** B est *bilinéaire*, i.e. $\forall a \in E$, $B(.,a)$ et $B(a,.)$ sont linéaires.
- **ii.** B est *symétrique*, i.e. $\forall x, y \in E$, $B(x,y) = B(y,x)$,
- **iii.** B est *positive*, i.e. $\forall x \in E$, $B(x,x) \geq 0$,
- **iv.** B est *définie*, i.e. $\forall x \in E$, $B(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

Un produit scalaire se note souvent $< x, y >$.

Définition

Soit $<,>$ un produit scalaire sur E. Le réel $\sqrt{< x, x >}$ se note $\|x\|$ et se lit *norme* de x.

Propriétés

1. $\forall x, y \in E, \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x, y >$
2. Inégalité de Cauchy-Schwarz :
   $\forall x, y \in E, < x, y > \leq \|x\| \|y\|$
   avec égalité ssi x et y sont colinéaires.
3. Inégalité de Minkowski :
   $\forall x, y \in E, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
   avec égalité ssi x et y sont colinéaires et de même sens.

Orthogonalité

Définition

Soit $<,>$ un produit scalaire sur E. Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits *orthogonaux* si $< x, y >= 0$ et on note $x \perp y$.

Pythagore

Soient $x, y \in E$. $x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Définition

Soit G un s.e.v. de E. On appelle orthogonal de G l'ensemble $G^\perp = \{x \in E | \forall a \in G, x \perp a\}$.

Proposition

1. $G^\perp$ est un s.e.v. de E.
2. G et $G^\perp$ sont supplémentaires.

Base orthonormale

Définition

Soit un E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension n. On appelle base *orthonormée* (ou *orthonormale*) toute famille orthonormée de n vecteurs, i.e., toute famille $e_1, \ldots, e_n \in E$ telle que $< e_i, e_j >= \delta_i^j$.

Propriétés

Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base orthonormée de E. Alors,

$$\forall x \in E, \qquad x = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i.$$

Métriques euclidiennes usuelles

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique et soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et *définie-positive* (i.e. telle que $\forall x \in E, x'Mx \geq 0$ et $x'Mx = 0 \Rightarrow x = 0$).

La matrice M définit sur l'espace E :

- un produit scalaire : $< x, y >_M = x'My$,
- une norme : $\|x\|_M = \sqrt{< x, x >_M}$,
- une distance : $d_M(x, y) = \|x - y\|_M$,
- des angles : $\cos\theta_M(x, y) = \frac{<x,y>_M}{\|x\|_M \|y\|_M}$.

Examples

Définitions

La matrice M étant donnée, on dit que :

- une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *M-symétrique* si $(MA)' = MA$,
- une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *M-orthogonale* si $A'MA = I$ et $AA' = M^{-1}$,
- deux vecteurs x et y sont *M-orthogonaux* si $< x, y >_M = 0$,
- un vecteur x est *M-normé* si $\|x\|_M = 1$.

Projections

Soit W un s.e.v. de E et $(b_1, \ldots, b_p)$ une base de W.

Définition

$P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de projection M-orthogonale sur W ssi

$$\forall y \in E, Py \in W \text{ et } < Py, y - Py >_M = 0.$$

Proposition

Toute matrice idempotente ($P^2 = P$) et M-symétrique ($P'M = MP$) est une matrice de projection M-orthogonale et réciproquement.

Projections

Proposition

La matrice de projection M-orthogonale sur W est donnée par

$$P = B(B'MB)^{-1}B'M,$$

où $B = (b_1| \dots |b_p)$. Dans le cas $p = 1$,

$$P = \frac{bb'}{b'Mb}M = \frac{1}{\|b\|_M^2}bb'M.$$

Autres propriétés :

- $trP = \dim W$.
- La matrice $I - P$ est la matrice de projection M-orthogonale sur $W^\perp$.

Compléments sur la diagonalisation

Théorème

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique admet p valeurs propres réelles. Ses vecteurs propres peuvent être choisis pour constituer une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. A se décompose en

$$A = V \Lambda V'$$

où $V = (v_1 | \dots | v_n)$ est une matrice orthogonale contenant les vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées par ordre décroissant dans la matrice diagonale Λ.

Compléments sur la diagonalisation

Théorème

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ M-symétrique admet p valeurs propres réelles. Ses vecteurs propres peuvent être choisis pour constituer une base M-orthonormée de $\mathbb{R}^n$. A se décompose en

$$A = V \Lambda V' M$$

où $V = (v_1 | \ldots | v_n)$ est une matrice M-orthogonale contenant les vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ rangées par ordre décroissant dans la matrice diagonale Λ.

Compléments sur la diagonalisation

Théorème

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques avec B inversible.

Le rapport $\frac{x'Ax}{x'Bx}$ est maximal pour $x \in \mathbb{R}^n$ vecteur propre de $B^{-1}A$ associé à sa plus grande valeur propre λ_1, λ_1 étant alors la valeur du maximum.