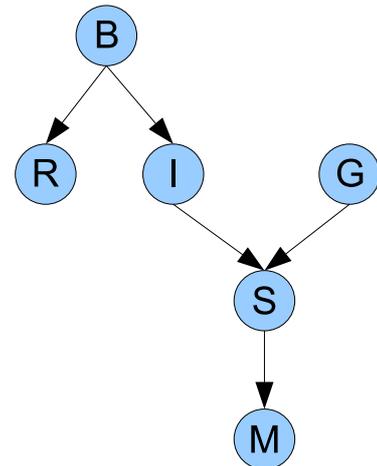


## Systèmes de Raisonnement Probabiliste – Examen

Durée : 1h30 Calculatrice autorisée mais peu utile  
Les questions de cet examen sont indépendantes les unes des autres

1. (1 point) Décomposition de la loi jointe  
Quelle est la décomposition de la loi jointe associée à la structure de droite ?

2. (5 points) Indépendance (conditionnelle)  
Remplir les \_\_\_ en trouvant, **si cela est possible**, des ensembles de variables qui permettent de rendre les variables suivantes indépendantes ( $\perp$ ) ou dépendantes ( $\not\perp$  étant une solution possible)



- (a)  $B \perp R | \_\_\_ \quad B \not\perp R | \_\_\_$
- (b)  $B \perp I | \_\_\_ \quad B \not\perp I | \_\_\_$
- (c)  $B \perp S | \_\_\_ \quad B \not\perp S | \_\_\_$
- (d)  $B \perp G | \_\_\_ \quad B \not\perp G | \_\_\_$
- (e)  $B \perp M | \_\_\_ \quad B \not\perp M | \_\_\_$
- (f)  $R \perp I | \_\_\_ \quad R \not\perp I | \_\_\_$
- (g)  $R \perp S | \_\_\_ \quad R \not\perp S | \_\_\_$
- (h)  $R \perp G | \_\_\_ \quad R \not\perp G | \_\_\_$
- (i)  $R \perp M | \_\_\_ \quad R \not\perp M | \_\_\_$

3. (4 points) Complexité d'un réseau bayésien  
La complexité d'un réseau bayésien est définie par le nombre total de valeurs indépendantes dans les tables de probabilités conditionnelles associées au graphe.

En supposant que les variables sont booléennes, calculer la complexité du réseau bayésien :

- (a) de la figure de droite
- (b) de la figure de droite, en inversant l'arc entre  $G$  et  $S$
- (c) de la figure de droite, en supprimant l'arc entre  $G$  et  $S$

4. (4 points) Inférence  
(a) Quels algorithmes d'inférence pouvons nous utiliser pour ce graphe ? Justifiez votre réponse.  
(b) Quel est l'arbre de jonction associé au graphe ?

5. (6 points) Notion de fidélité  
On parle de fidélité entre un graphe  $\mathcal{G}$  et une distribution de probabilité  $P : \mathcal{G}$  et  $P$  sont dits fidèles si  $\mathcal{G}$  contient toutes les indépendances conditionnelles décrites par  $P$ , et réciproquement.

Soit le réseau bayésien à trois variables  $X, Y$  et  $Z$  défini par la V-structure  $X \rightarrow Z \leftarrow Y$  et les tables de probabilité conditionnelles suivantes :

- $P(X = x_1) = a,$	- $P(X = x_2) = 1 - a$	
- $P(Y = y_1) = b,$	- $P(Y = y_2) = 1 - b$	
- $P(Z = z_1 x_1, y_1) = c,$	- $P(Z = z_2 x_1, y_1) = e,$	- $P(Z = z_3 x_1, y_1) = g,$
- $P(Z = z_4 x_1, y_1) = 1 - c - e - g$		
- $P(Z = z_1 x_1, y_2) = c,$	- $P(Z = z_2 x_1, y_2) = f,$	- $P(Z = z_3 x_1, y_2) = g,$
- $P(Z = z_4 x_1, y_2) = 1 - c - f - g$		
- $P(Z = z_1 x_2, y_1) = d,$	- $P(Z = z_2 x_2, y_1) = e,$	- $P(Z = z_3 x_2, y_1) = c + g - d,$
- $P(Z = z_4 x_2, y_1) = 1 - c - e - g$		
- $P(Z = z_1 x_2, y_2) = d,$	- $P(Z = z_2 x_2, y_2) = f,$	- $P(Z = z_3 x_2, y_2) = c + g - d,$
- $P(Z = z_4 x_2, y_2) = 1 - c - f - g$		

- (a) Quelle information nous apporte le graphe sur le lien de dépendance entre  $X$  et  $Y$  ?
- (b) Montrez que la distribution de probabilité associée à ce réseau bayésien contredit cette information.