IUT de Saint-Nazaire, Département Mesures Physiques
Semestre 1 – 2008/2009

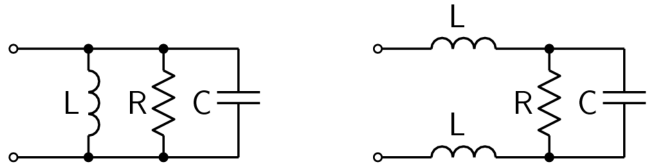
Evaluation d'Électricité 1

Consignes: Les exercices sont par ordre croissant de difficulté, commencez par le début. Des points seront attribués à la présentation de votre copie et la rigueur de vos démarches.

Bon courage

Impédance équivalente en régime sinusoïdal

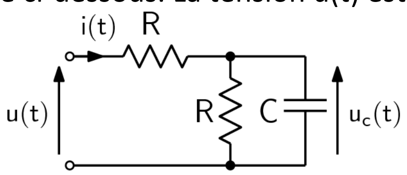
Calculer l'impédance complexe équivalente des deux circuits donnés ci-dessous. Donner l'expression du module et de l'argument de ces deux impédances et faire l'application numérique.



$L = 1$ mH, $R = 1\,\Omega$, $C = 1\,\mu F$, $f = 1$ Hz

Tension et courant dans un circuit en régime sinusoïdal

Soit le circuit donné ci-dessous. La tension u(t) est choisie comme référence.



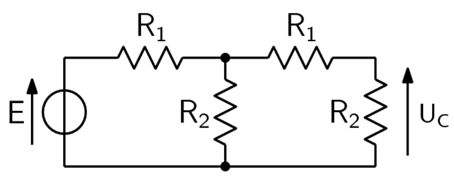
$R = 1$ kΩ $\quad C = 10\,\mu F$

$u(t) = 10 \sin(2\pi 1000\, t)$

1. Donner l'amplitude, la fréquence et la phase à l'origine de la tension u(t).
2. Pour trouver le courant i(t), il est nécessaire de passer par une représentation en nombres complexes. Expliquer pourquoi. Comment s'écrit la tension de référence u(t) en complexe.
3. Calculer l'impédance équivalente du circuit.
4. En déduire l'expression du courant i(t).
5. Calculer l'impédance équivalente composée de R en parallèle avec C. Noter cette impédance Zeq1. Il doit vous rester une résistance R en série avec l'impédance équivalente Zeq1.
6. Calculer l'expression de la tension de sortie uc(t) en vous aidant de la question 5.

Thevenin/Norton

1. Par la méthode de Thevenin, calculer la tension de sortie Uc, en fonction des paramètres du circuit.
2. Remplacer les deux résistances R1 par des condensateurs C1=1 µF. Calculer alors, pour une source e(t) sinusoïdale de fréquence de 1000 Hz et une amplitude de 10 V, la nouvelle expression de la tension de sortie uc(t).

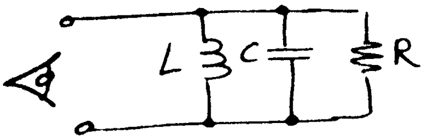


$R_1 = 1$ kΩ
$R_2 = 2$ kΩ
$E = 10$ V

correction devoir d'électricité, DS2, 2008-2009

Impédance équivalente en régime sinusoïdal

circuit 1



$$\boxed{(L//C)//R}$$ 3 impédances en parallèle

$\underline{Z}_L = jL\omega$; $\underline{Z}_C = \dfrac{1}{jC\omega}$; $\underline{Z}_R = R$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_L} + \frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_R} = jL\omega + \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R}$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{-RLC\omega^2 + R + jL\omega}{jRL\omega} = \frac{R(1-LC\omega^2) + jL\omega}{jRL\omega}$$

$$\boxed{\underline{Z}_{eq} = \frac{jRL\omega}{R(1-LC\omega^2) + jL\omega}}$$

Module

$$|\underline{Z}_{eq}| = \frac{|\text{numérateur}|}{|\text{dénominateur}|}$$

$$\boxed{|\underline{Z}_{eq}| = \frac{RL\omega}{\sqrt{(R(1-LC\omega^2))^2 + (L\omega)^2}}} = 6,28\ \text{m}\Omega$$

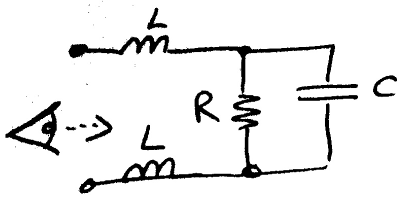
Argument

$$\text{Arg}(\underline{Z}_{eq}) = \text{Arg}(\text{numérateur}) - \text{Arg}(\text{dénominateur})$$

$$= \text{Arctan}\left(\frac{RL\omega}{0}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{L\omega}{R(1-LC\omega^2)}\right)$$

$$\boxed{\text{Arg}(\underline{Z}_{eq}) = 90° - \text{Arctan}\left(\frac{L\omega}{R(1-LC\omega^2)}\right)} = 89,64°$$

Circuit 2



impédance équivalente :

$L + (R // C) + L$

$\underline{Z}_L = jL\omega \quad ; \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} \quad ; \quad \underline{Z}_R = R$

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{\frac{R}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} + jL\omega + jL\omega = \frac{R}{1 + jRC\omega} + j2L\omega$$

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{R + j2L\omega - 2RLC\omega^2}{1 + jRC\omega} = \frac{R(1 - 2LC\omega^2) + j2L\omega}{1 + jRC\omega}$$

Module :

$$|\underline{Z}_{eq}| = \frac{\sqrt{[R(1-2LC\omega^2)]^2 + (2L\omega)^2}}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \simeq 1\,\Omega$$

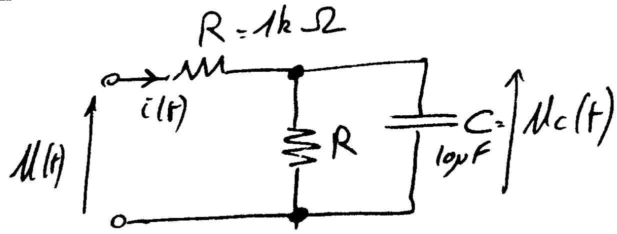
$$\boxed{|\underline{Z}_{eq}| \simeq 1\,\Omega}$$

Argument :

$$Arg(\underline{Z}_{eq}) = Arctan\left(\frac{2L\omega}{R(1-2LC\omega^2)}\right) - Arctan(RC\omega)$$

$$\boxed{Arg(\underline{Z}_{eq}) \simeq 0,72°}$$

Tension et courant dans un circuit en régime sinusoïdal



$u(t) = 10 \sin(2\pi 1000 t)$

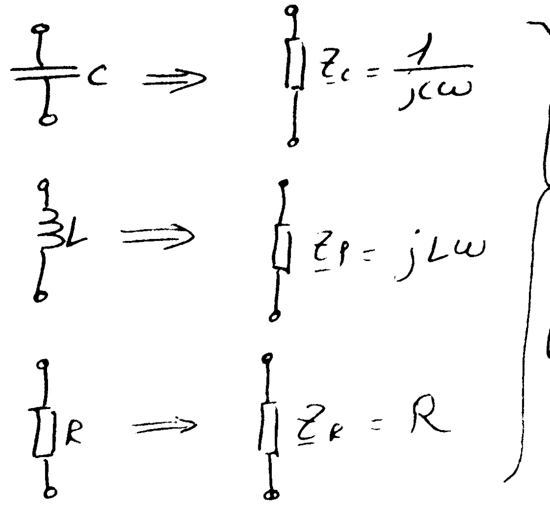
1) Tension $u(t)$: * Amplitude : $\boxed{10\,V}$

* fréquence : $\omega = 2\pi . 1000 = 2\pi f$

$\boxed{f = 1000\,Hz}$

* Phase à l'origine : $\boxed{0°}$

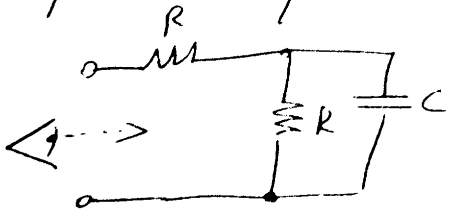
2) Afin d'éviter la résolution d'équation différentielles et parce que l'on est en régime sinusoïdal, il est possible de travailler en complexe:



de même, la tension d'alimentation peut être exprimée en complexe:

$$\boxed{\underline{u}(t) = 10\, e^{j2\pi 1000 t}}$$

3) Impédance équivalente



$R + (R//C)$

$$\underline{Z}_{eq} = R + \frac{R}{1+jRC\omega}$$

$$\boxed{\underline{Z}_{eq} = R\left(\frac{2+jRC\omega}{1+jRC\omega}\right)}$$

4) On écrit $\underline{Z}_{eq}$ sous la forme d'un module et d'un argument: $\underline{Z}_{eq} = Z\, e^{j\varphi_Z}$

$$Z = |\underline{Z}_{eq}| = R\,\frac{\sqrt{2^2+(RC\omega)^2}}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} \simeq 1000\,\Omega$$

$$\varphi_Z = \mathrm{Arg}(2+jRC\omega) - \mathrm{Arg}(1+jRC\omega) \simeq -1°$$

On en déduit alors l'expression du courant $\underline{i}(t)$ en complexe:

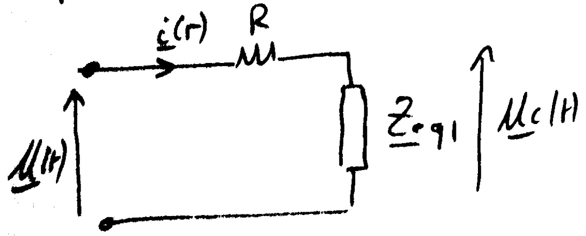
$$\underline{u}(t) = \underline{Z}_{eq} \times \underline{i}(t)$$

$$\underline{i}(t) = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{10\, e^{j\omega t}}{1000\, e^{-j1^\circ}}$$

$$\boxed{\underline{i}(t) = 0{,}100\, e^{j(\omega t + 1^\circ)}}$$ → en temporel, on remplace e^j par $\sin(\dots)$

$$\boxed{i(t) = 0{,}1 \ \sin(\omega t + 1^\circ)}$$ avec $\omega = 2\pi \cdot 1000$ rad/s

5) impédance de $R /\!/ C$: $\underline{Z}_{eq1} = \dfrac{\frac{R}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \dfrac{R}{1 + jRC\omega}$



6) Pour trouver $\underline{u}_c(t)$, 2 solutions :

* Pont diviseur de tension

$$\underline{u}_c(t) = \underline{u}(t) \times \frac{\underline{Z}_{eq1}}{R + \underline{Z}_{eq1}}$$

* Loi d'ohm :

$$\underline{u}_c(t) = \underline{Z}_{eq1} \times \underline{i}(t)$$

Par le pont diviseur de tension, on trouve :

$$\underline{u}_c(t) = 10\, e^{j\omega t} \cdot \frac{\frac{R}{1+jRC\omega}}{R + \frac{R}{1+jRC\omega}} = \frac{R}{2R + jR^2C\omega} \cdot 10\, e^{j\omega t}$$

$$\underline{u}_c(t) = \underbrace{\frac{1}{2 + jRC\omega}}_{\underline{H}} \, 10\, e^{j\omega t}$$

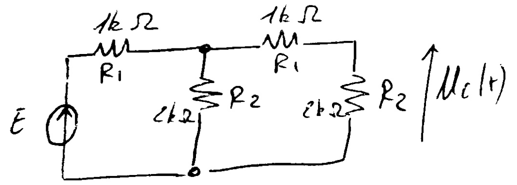
On cherche le module et l'argument de $\underline{H} = \dfrac{1}{2+jRC\omega}$

$$\begin{cases} |H| = \dfrac{1}{\sqrt{4+(RC\omega)^2}} = 0{,}0159 \\ Arg(H) = 0° - Arg(2+jRC\omega) = -\arctan\left(\dfrac{RC\omega}{2}\right) = -88° \end{cases}$$

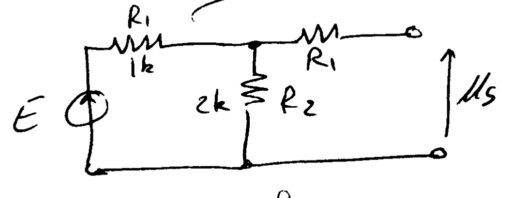
$$\underline{u}_C(t) = \underbrace{0{,}0159\, e^{-j88°}}_{\underline{H}} \cdot \underbrace{10\, e^{j\omega t}}_{\underline{u}(t)} = 0{,}159 \times e^{j(\omega t - 88°)}$$

en temporel : $\boxed{u_C(t) = 0{,}159 \sin(\omega t - 88°)}$

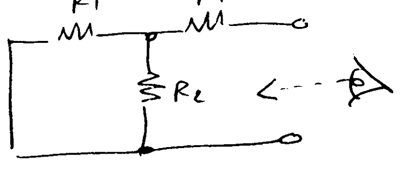
Thevenin / Norton



1) Pour le modèle de Thevenin équivalent, on enlève par exemple la résistance R2 de droite (on considère que c'est la charge). Soit à modéliser :



pour calculer la résistance équivalente de Thevenin, on éteind la source E (court-circuit)



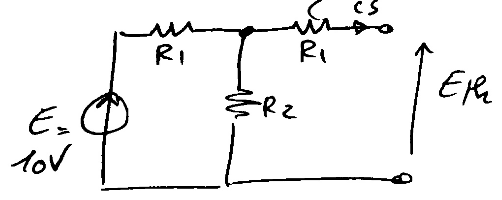
vu de la charge/sortie :

$$R_{Th} = R_{eq} = (R_1 // R_2) + R_1$$

$$R_{Th} = R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_1 = 1{,}666\,k\Omega$$

$$\boxed{R_{Th} = 1{,}666\,k\Omega}$$

Pour trouver la source de tension équivalente de Thevenin, on rallume la source et on calcul la tension de sortie sans la charge:

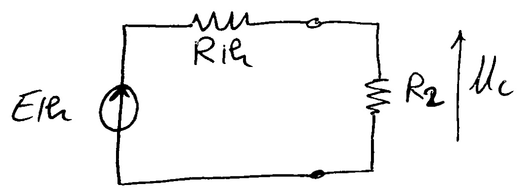


Le courant de sortie i_s est nul car il n'y a pas de charge : Pas de chute de tension aux bornes de la résistance R_1 de droite. Soit:

$$E_{Th} = E \times \frac{R_2}{R_1+R_2} = E \times \frac{2}{3} = 6,666\,V$$

$$\boxed{E_{Th} = 6,666\,V}$$

Soit le générateur équivalent de Thevenin:

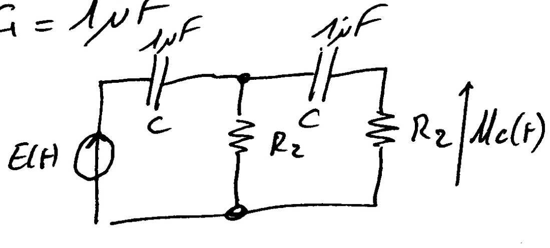


avec la charge, la tension de sortie U_c aux bornes de R_1 devient:

$$U_c = \frac{R_2}{R_2+R_{Th}} \times E_{Th}$$

$$\boxed{U_c = 3,63\,V}$$

2) on remplace les résistances R_1 par des condensateurs $C_1 = 1\mu F$



à la question 1), on obtenait :

$$R_{th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_1 .$$

en complexe, on remplace R_1 par $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$

$$\underline{Z}_{th} = \frac{\underline{Z}_C R_2}{\underline{Z}_C + R_2} + \underline{Z}_C = \frac{\frac{1}{jC\omega} R_2}{\frac{1}{jC\omega} + R_2} + \frac{1}{jC\omega}$$

$$\underline{Z}_{th} = \frac{R_2}{1 + jR_2C\omega} + \frac{1}{jC\omega} = \frac{jR_2C\omega + 1 + jR_2C\omega}{jC\omega(1 + jR_2C\omega)}$$

$$\boxed{\underline{Z}_{th} = \frac{j2R_2C\omega + 1}{jC\omega(1 + jR_2C\omega)}}$$

Toujours à la question 1), on trouvait :

$$E_{th} = E \times \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

En complexe, on remplace R_1 par $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$

$$\boxed{\underline{E}_{th}(H) = \underline{E} \times \frac{R_2}{\frac{1}{jC\omega} + R_2} = \underline{E} \times \frac{jR_2C\omega}{1 + jR_2C\omega}}$$

Enfin, la tension de sortie u_C était :

$$u_C = \frac{R_2}{R_2 + R_{th}} \times E_{th}$$

On remplace donc $\begin{cases} R_1 \text{ par } \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} \\ R_{th} \text{ par } \underline{Z}_{th} \\ E_{th} \text{ par } \underline{E}_{th} \end{cases}$

$$\underline{u}_C(H) = \frac{R_2}{R_2 + \underline{Z}_{th}} \times \underline{E}_{th}$$

$$\underline{u_c}(t) = \frac{R_2}{R_2 + \dfrac{j2R_2C\omega+1}{jC\omega(1+jR_2C\omega)}} \times \frac{jR_2C\omega}{1+jR_2C\omega} \times \underline{E}(t)$$

$$\underline{u_c}(t) = \frac{jR_2C\omega\,\cancel{(1+jR_2C\omega)}}{jR_2C\omega(1+jR_2C\omega) + j2R_2C\omega + 1} \times \frac{jR_2C\omega}{\cancel{1+jR_2C\omega}} \times \underline{E}(t)$$

$$\underline{u_c}(t) = \frac{-R_2^2C^2\omega^2}{jR_2C\omega - R_2^2C^2\omega^2 + j2R_2C\omega + 1} \times \underline{E}(t)$$

$$\boxed{\underline{u_c}(t) = \frac{-(R_2C\omega)^2}{1-(R_2C\omega)^2 + j3R_2C\omega} \times \underline{E}(t)}$$

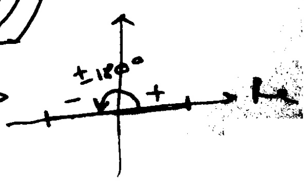
$$\underline{E}(t) = 10\,e^{j2\pi.1000\cdot t}$$

on cherche donc les module et argument de $\underline{H}$, avec

$$\underline{H} = \frac{-(R_2C\omega)^2}{1-(R_2C\omega)^2 + j3R_2C\omega}$$

$$|H| = \frac{(R_2C\omega)^2}{\sqrt{(3R_2C\omega)^2 + \left[1-(R_2C\omega)^2\right]^2}} = 0{,}978$$

$$\mathrm{Arg}(\underline{H}) = \underbrace{\pm 180^\circ}_{\text{numérateur} = -c^{te}} - \mathrm{Arg}\left[j3R_2C\omega + (1-(R_2C\omega)^2)\right]$$



$$\mathrm{Arg}(\underline{H}) = \pm 180^\circ - \mathrm{Arctan}\left(\frac{3R_2C\omega}{1-(R_2C\omega)^2}\right)$$

$$\boxed{\mathrm{Arg}(H) = +193^\circ \text{ ou } -166^\circ}$$

$$\underline{u_c}(t) = 0{,}978\,e^{-j166^\circ} \times 10\,e^{j2\pi 1000 t} = 9{,}78\,e^{j(2\pi.1000t - 166^\circ)}$$

en temporel : $\boxed{u_c(t) = 9{,}78 \sin(2\pi.1000t - 166^\circ)}$