

2013/2014

*Spécialité Génie Electrique*

**MECANIQUE**

**COURS ET TRAVAUX DIRIGES**

E. GIRARD – F. ROUX

- Quatrième année -

*Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur et de l'école*



## SOMMAIRE

- p 3 Chapitre 1** Propriétés de la mécanique, notion d'énergie mécanique, Conversion d'énergie, rappel d'unités,
- p 7 Chapitre 2** Principe Fondamental de la Statique, description d'une action mécanique par un torseur d'action de contact  
Etude d'un réducteur à denture hélicoïdale  
Détermination des actions sur les paliers de l'arbre d'entrée
- p 13 Chapitre 3** Notion de tribologie, notions de frottement et de limite d'adhérence, notions de lubrification,
- p 16 Chapitre 4** Rappel de cinématique, torseur cinématique, étude cinématique d'un système en rotation et en translation, Ralentissement d'une voiture automobile, freinage et choc, énergie absorbée couple et puissance disponibles d'un moteur à combustion interne,
- p 22 Chapitre 5** Notion de Résistance des Matériaux, torseur de cohésion de la matière, contrainte et déformation calcul à la traction  
Calcul au cisaillement et à la torsion, présentation de la méthode de calculs par éléments finis en résistance des matériaux
- p 31 Chapitre 6** Cinétique et dynamique, moment d'inertie, application du moment dynamique pour la détermination du couple résistant  
Calcul sur le ralentissement d'un moteur électrique, effet gyroscopique, calcul des actions dynamiques supplémentaires sur les paliers
- p 36 Chapitre 7** La mécanique vibratoire, notion d'équilibrage
- p 44 Chapitre 8** Travaux Dirigés
- p 55 Exercice de Synthèse à disposition** (contrôles d'année passée)

## Chapitre 1

# PRESENTATION de la MECANIQUE

## 1. UNE TECHNOLOGIE

Les systèmes industriels comprennent différentes technologies : électronique, électrotechnique, informatique industrielle, hydraulique, pneumatique, thermique et plus particulièrement la technologie mécanique.

Cette technologie a pour fonction :

- d'assurer des transformations de mouvements régies par les lois de cinématique,
- de transmettre des efforts entre les systèmes en statique et en dynamique,
- de résister aux conditions de fonctionnement (résistance des matériaux, corrosion des agents chimiques et variation de température),
- d'atteindre la durée de vie et la fiabilité souhaitées,
- en respectant le coût global (achat, utilisation, extinction).

## 2. LE DESSIN TECHNIQUE : OUTIL DE COMMUNICATION

Le dessin industriel, manuel ou assisté par ordinateur, est l'outil de communication indispensable pour représenter un objet ou un produit. Cet outil permet aussi de représenter l'infrastructure industrielle par un plan de masse et celui d'un bâtiment. Des plans spécifiques relatifs aux réseaux (eaux, énergie, communication) peuvent compléter cette représentation et nécessitent une mise à jour périodique. La représentation d'un système mécanique utilise les mêmes outils de représentation ce qui fait du dessin industriel, un outil de communication indispensable à l'ingénieur d'aujourd'hui et de demain.

Il s'agit d'un langage universel, rigoureux dont les règles sont normalisées internationalement (International Standart Organisation) ou nationalement (Association Française de NORmalisation).

Pour décrire un système en technologie mécanique, nous avons la nécessité d'imaginer un objet dans l'espace ou un système technique en trois dimensions tout en le représentant en deux dimensions sur un plan papier. Les autres technologies sont le plus souvent en deux dimensions. La compréhension de ce passage 3D vers le 2D ou inversement nécessite des apprentissages qui développent des capacités de vision dans l'espace. Cette qualité doit être travaillée et développée par des exercices graphiques répétés au cours d'une formation personnelle.

Les logiciels de modélisation par Eléments Finis, directement intégrés dans les logiciels de Dessin Assisté par Ordinateur ou Conception Assisté par Ordinateur, permettent d'approcher la répartition des contraintes et des déformations dans les pièces mécaniques et préfigurent l'éventuelle rupture de la pièce par fatigue ou par sollicitations trop élevées.

## 3. LES COMPOSANTS MECANIQUES

La conception de produit se fait de plus en plus par intégration de composants mécaniques du commerce. La justification est économique puisque la fabrication en série permet de diminuer les prix de revient d'un produit. L'étude de composants mécaniques, de moteurs électriques, de moteurs à combustion interne, de réducteurs mécaniques, d'accouplements, de capteurs doivent être effectués à partir de catalogues constructeurs en constituant une bibliothèque ou une documentation technique au sein de l'entreprise. Les

nouvelles technologies à consulter sur le « Web » permettront d'améliorer la communication et l'information. La méthodologie, la rigueur, l'étude des coûts et des délais, et l'expérience resteront les éléments primordiaux, pour l'aboutissement d'une étude.

#### 4. LES UNITES EN MECANIQUE

La puissance mécanique s'exprime en Watt (W) et correspond pour un mouvement de translation, au produit d'une force exprimée en Newton (N) par la vitesse en (m/s). Pour les mouvements de rotation, la puissance est le produit d'un moment (ou couple) en N.m par une vitesse angulaire en rad/s.

$$P_{(W)} = F_{(N)} \cdot v_{(m/s)} = C_{(N.m)} \cdot \omega_{(rad/s)}$$

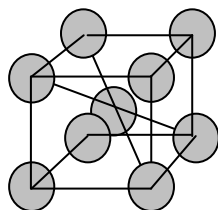
Le moment d'une force est le produit vectoriel d'un vecteur distance et d'un vecteur force. La norme de ce vecteur s'exprime en N.m. Les forces sont définies en (N) soit des (kg.m.s<sup>-2</sup>). L'unité de longueur est le mètre (m), avec la possibilité d'utiliser les autres notations en tel que 10<sup>3</sup> mètres (km), 10<sup>-3</sup> mètre (mm), 10<sup>-6</sup> mètre (µm), 10<sup>-9</sup> mètre (nm). Les vitesses linéaires sont définies par une longueur parcourue par unité de temps (m/s) et les accélérations en (m/s<sup>2</sup>). De même manière, les vitesses angulaires se définissent en (rad/s) et les accélérations en (rad/s<sup>2</sup>). En vibration, les déplacements sont exprimés en (µm), les vitesses de déplacement sont en (mm/s) et les accélérations en (m/s<sup>2</sup>). Le travail ou l'énergie quelle soit potentielle ou cinétique s'exprime en joule (J) soit des (kg.m<sup>2</sup>.s<sup>-2</sup>), les moments d'inertie en (m<sup>2</sup>.kg), les moments cinétiques en (m<sup>2</sup>.kg.s<sup>-1</sup>), et les moments quadratiques en (m<sup>4</sup>). L'unité de résistance mécanique s'exprime en N.mm<sup>-2</sup> ou MPa. Un Pascal (unité secondaire de mécanique) est un N.m<sup>-2</sup>.

$$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \text{ N/m}^2 = 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} = 1 \text{ N/mm}^2 \text{ avec } 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

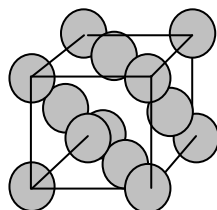
#### 5. LES MATERIAUX

Les matériaux sont composés d'atomes qui assurent la cohésion de la matière. Les forces de liaison peuvent entraîner une organisation régulière des atomes, suivant un réseau cristallin ou au contraire sous la forme de chaînes moléculaires d'orientations quelconques dit matériaux amorphes. Les modèles de liaison peuvent s'appliquer à n'importe quelle organisation atomique, en tenant compte de la température et de la pression. L'état cristallin est caractérisé par l'existence de symétrie de translation dans trois directions de l'espace. Les structures des solides cristallisés peuvent être décrites par 7 symétries de translation et 14 réseaux particuliers appelés réseaux de Bravais. Les données de la maille du réseau de Bravais ne suffit pas et doivent être complétées par le motif des différents atomes qui composent le matériau.

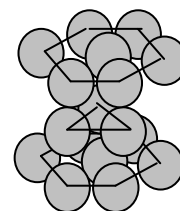
Les trois structures simples dans les matériaux métalliques,



Cubique Centré



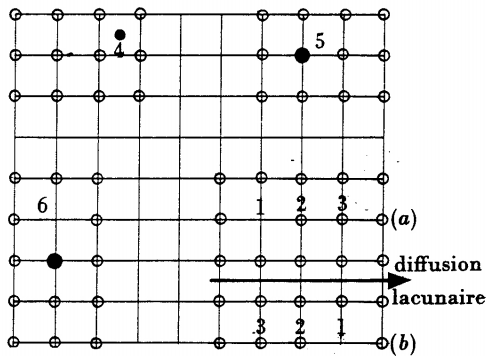
Cubique à faces centrées



Hexagonal Compact

(Cu, Ag, Au, Al, Pb, Ni, Fe $\gamma$ ) (V, Cr, Nb, Mo, W, Fe $\alpha$ , Ti $\beta$ ) (Mg, Co, Cd, Zn, Ti $\alpha$ )

Ces liaisons atomiques permettent d'expliquer le comportement élastique des matériaux (début de la déformation). L'état cristallin a été décrit comme un cristal parfait où le réseau formé par les atomes était régulier. Cette définition est abstraite car les cristaux ont des défauts.

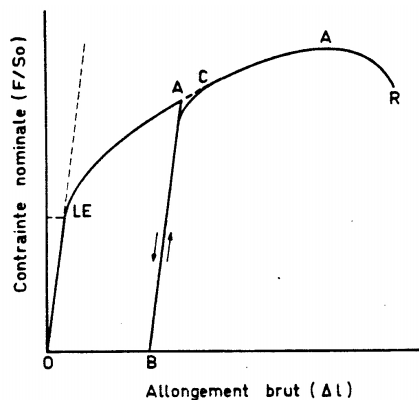


Dans la figure proposée, le premier type de défaut est une lacune (repère 6) ou éventuellement une bi lacune. Il peut y avoir un atome étranger en substitution qui provoque des distorsions du réseau en raison des différences de champs (repère 5). C'est le cas des atomes de carbone dans le fer pour réaliser l'acier (1% de carbone). Il peut y avoir aussi des atomes en insertion (repère 4) qui n'ont pas vraiment une place et qui chercheront à rejoindre une lacune.

Enfin, on peut expliquer l'évolution de la diffusion atomique ou lacunaire résultant d'une suite de permutation de lacune et d'atome voisin, nécessitant de l'énergie pour rompre l'équilibre.

## 6. LES PROPRIETES DES MATERIAUX

Parmi toutes les propriétés des matériaux, la résistance à la rupture à la traction est une propriété très intéressante en mécanique.



Pour connaître ces caractéristiques, un essai d'extension est nécessaire sur une éprouvette normalisée pour observer le comportement du matériau. On impose à une éprouvette de longueur utile  $l_0$  et de section initiale  $S_0$  de s'allonger à une vitesse donnée en lui appliquant un effort uni axial de traction. On enregistre la courbe qui relie l'effort fourni à la déformation produite.

Pour les matériaux métalliques, l'éprouvette s'allonge d'abord de façon élastique et réversible, puis passé un seuil de limite élastique (LE), une déformation plastique permanente provient de l'augmentation des contraintes dans le matériau. Si arrivé à un état C, on relâche la contrainte, le point figuratif dans le diagramme descend parallèlement à la droite élastique initiale. Le point C devient la nouvelle limite élastique par le phénomène d'écrouissage à savoir la modification des propriétés des matériaux par déformation plastique. Le matériau garde la mémoire des déformations antérieures. Lors de la remise en charge, la courbe décrit BC en déformation élastique puis reprend la déformation plastique jusqu'au point A. Ce point définit la limite à la rupture car après ce point, la déformation, au lieu d'être uniformément répartie le long de l'éprouvette, se localise dans une zone limitée appelée striction.

La contrainte nominale est égale au rapport de la force sur la section  $S_0$ . La déformation est égale au rapport de l'allongement sur la longueur initiale  $L_0$ .

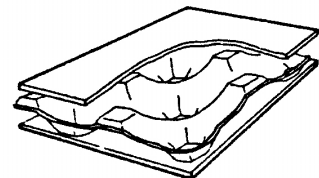
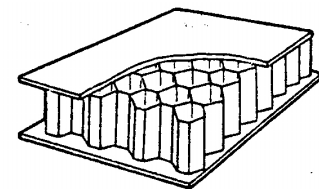
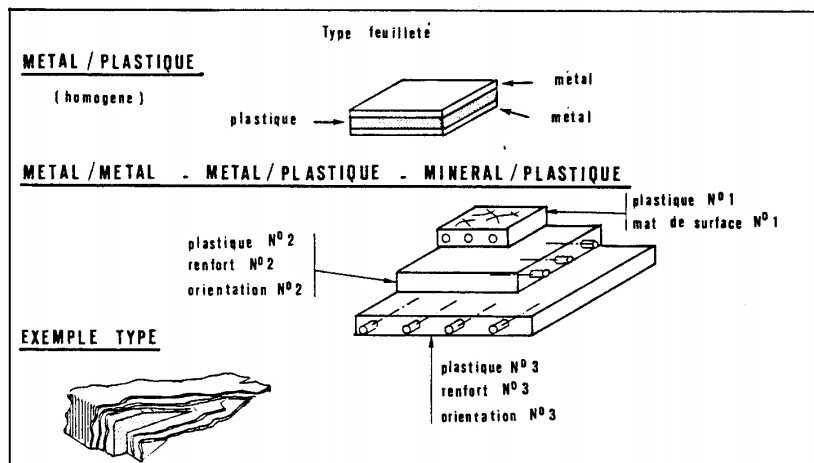
Trois valeurs sont retenues de cette courbe :

1. La Résistance à la Rupture à l'Extension (Rre) en MPa ou  $N.mm^{-2}$
2. La Résistance Elastique à l'Extension (Ree) en MPa
3. L'allongement pour cent égal au rapport de l'allongement sur la longueur initiale et multiplié par cent.

Le rapport de la contrainte sur la déformation dans la partie élastique est une constante du matériau appelé **module d'Young** (Coefficient de sensibilité à la déformation)

## 7. MATERIAUX COMPOSITES ou SYNTACTIQUES

Un matériau composite est un matériau constitué de fibres servant d'armature pour résister aux sollicitations extérieures et une matrice permettant de maintenir la liaison entre les fibres. Dans certains cas, on rajoute des charges inertes pour diminuer le coût de ces composites. Le béton est le premier composite utilisé dans le monde.



Les matériaux syntactiques sont l'utilisation des matériaux en sandwich pour l'augmentation de la résistance en flexion.

Chapitre 2

# LA STATIQUE

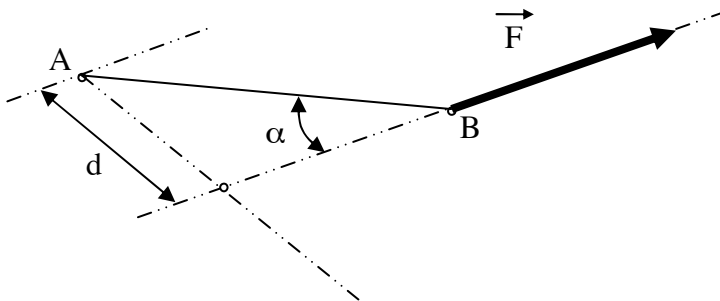
## 1. REPRESENTATION D'UNE ACTION MECANIQUE

Pour représenter une force, on utilise l'outil mathématique vecteur que l'on nomme vecteur-force. Ce vecteur est défini par un point d'application, une direction, un sens et une intensité (ou module). Ce vecteur peut se décomposer en trois composantes dans un repère orthonormé, ce qui permet d'utiliser la notation matricielle tel que :

$$\vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} = \begin{pmatrix} X_{2 \rightarrow 1} \\ Y_{2 \rightarrow 1} \\ Z_{2 \rightarrow 1} \end{pmatrix}_{O_{xyz}} \quad \text{soit} \quad \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} = X_{2 \rightarrow 1} \vec{i} + Y_{2 \rightarrow 1} \vec{j} + Z_{2 \rightarrow 1} \vec{k}$$

## 2. NOTION DE MOMENT D'UNE FORCE

Lorsqu'on applique une force qui passe par le Centre de Gravité d'un objet libre, celui-ci peut être animé d'un mouvement de translation rectiligne. Si la force ne passe pas par le Centre de Gravité, l'objet est animé à la fois d'un mouvement de rotation et de translation. Pour traduire avec précision les effets d'une force, il est nécessaire de faire intervenir la notion de moment. Le moment de la force  $F$  par rapport au point  $A$  (noté  $M_A(\vec{F})$ ), est égal au produit de  $F$  par le bras de levier  $d$ . Si le point d'application de la force  $F$  est au point  $B$ , le moment peut s'écrire comme le produit de la force  $F$  par la longueur  $AB$  multiplié par le sinus de l'angle  $\alpha$ .



$$M_A(\vec{F}) = F \cdot AB \cdot \sin \alpha$$

Le moment d'une force peut être décrit sous forme vectorielle et défini par le produit vectoriel du vecteur distance  $(\vec{AB})$  par le vecteur force  $(\vec{F})$ . Ce vecteur est défini par un point d'application  $A$ , une direction perpendiculaire au plan contenant les deux vecteurs, un sens et une intensité (ou module). Ce vecteur peut se décomposer en trois composantes dans un repère orthonormé, ce qui permet d'utiliser la notation matricielle tel que :

$$\vec{M}_{O(2 \rightarrow 1)} = \begin{pmatrix} L_{2 \rightarrow 1} \\ M_{2 \rightarrow 1} \\ N_{2 \rightarrow 1} \end{pmatrix}_{O_{xyz}} \quad \text{soit} \quad \vec{M}_{O(2 \rightarrow 1)} = L_{2 \rightarrow 1} \vec{i} + M_{2 \rightarrow 1} \vec{j} + N_{2 \rightarrow 1} \vec{k}$$

## 3. CONDITION D'EQUILIBRE POUR UN SYSTEME PLAN

Avant de poser le problème général de l'équilibre d'un solide, il est important de rappeler le principe d'équilibre de système soumis à 2 ou 3 forces. En effet, ce principe permet de résoudre rapidement quelques problèmes sans faire appel à des techniques plus élaborées.

L'objet est de démontrer que le choix de l'outil est fondamental dans toute résolution de problème. Dans un premier temps, il faut considérer un système matériel d'une pièce (ou de plusieurs pièces ou même d'un ensemble complet) et de faire l'inventaire des forces extérieures au système étudié (contact ou à distance). La résolution générale d'un problème est de rechercher à faire l'étude de l'ensemble, puis à rechercher tous les systèmes soumis à 2 forces, puis ceux à trois forces, puis à nombre supérieur de forces.

#### 31- Système matériel soumis à 2 forces

Un système soumis à 2 forces, reste en équilibre si ces deux forces sont égales et opposées. Ces deux forces ont donc la même ligne d'action, même intensité mais sont de sens opposés.

#### 32- Système matériel soumis à 3 forces

Un système soumis à 3 forces reste en équilibre à trois conditions :

1. Les trois forces sont coplanaires,
2. Elles sont concourantes en un seul point ou parallèle,
3. La somme vectorielle de ces trois forces est nulle.

### 4. NOTION DE TORSEUR

Pour représenter une liaison entre deux solides, il est possible d'utiliser un torseur d'action de contact définissant les efforts dans cette liaison ou un torseur cinématique exprimant les vitesses entre les solides.

Un torseur est un couple ordonné de deux vecteurs exprimé en un point donné du repère. Le premier vecteur est invariable et s'appelle la résultante du torseur. Le deuxième vecteur est le moment du torseur exprimé en un point donné du repère.

$$\mathcal{T}_{O(2 \rightarrow 1)} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} \\ \vec{M}_{O(2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_{Oxyz} \quad \text{avec } \vec{M}_{O(2 \rightarrow 1)} = \vec{M}_{A(2 \rightarrow 1)} + O\vec{A} \wedge \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)}$$

Les composantes de la résultante et du moment de ce torseur, dans un système d'axes orthonormés, constituent un ensemble de 6 nombres appelés coordonnées plucklériennes du torseur et peuvent s'écrire pour un torseur d'action de contact :

$$\mathcal{T}_{O(2 \rightarrow 1)} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} \\ \vec{M}_{O(2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_{Oxyz} = \left\{ \begin{array}{ll} X_{2 \rightarrow 1} & L_{2 \rightarrow 1} \\ Y_{2 \rightarrow 1} & M_{2 \rightarrow 1} \\ Z_{2 \rightarrow 1} & N_{2 \rightarrow 1} \end{array} \right\}_{Oxyz}$$

$$\text{soit } \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} = X_{2 \rightarrow 1} \vec{i} + Y_{2 \rightarrow 1} \vec{j} + Z_{2 \rightarrow 1} \vec{k}$$

$$\vec{M}_{O(2 \rightarrow 1)} = L_{2 \rightarrow 1} \vec{i} + M_{2 \rightarrow 1} \vec{j} + N_{2 \rightarrow 1} \vec{k}$$

La présence de 6 composantes non nulles dans le torseur d'action de contact correspond à une liaison encastrement (sans degré de liberté) ou liaison complète.

Soit un solide S qui subit de la part d'un ensemble matériel E une action mécanique représentée par un système de n forces, il est possible de caractériser globalement cette action mécanique par rapport à un point A dans un référentiel R(O, x, y, z, t).

$$\mathcal{T}_{A(E \rightarrow S)} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(E \rightarrow S)} \\ \vec{M}_{A(E \rightarrow S)} \end{array} \right\}_{Oxyz} \quad \text{avec } \vec{M}_{O(E \rightarrow S)} = \vec{M}_{A(E \rightarrow S)} + O\vec{A} \wedge \vec{R}_{(E \rightarrow S)}$$

$$\vec{R}_{(E \rightarrow S)} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i \quad \text{et} \quad \vec{M}_{A(E \rightarrow S)} = \sum_{i=1}^{i=n} \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{F}_i$$



Ce couple de deux vecteurs  $\mathcal{T}_{A (E \rightarrow S)}$  est appelé torseur d'action mécanique. Le premier terme est la résultante générale du torseur d'action mécanique et le deuxième terme est le moment résultant au point A du torseur d'action mécanique de E sur S.

L'action mécanique de la pesanteur est toujours présente sur tous les mécanismes. Toutefois, en comparaison avec d'autres actions mécaniques beaucoup plus intenses, nous serons amenés à la négliger dans certains cas.

## 5. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE

Un système matériel {E} est en équilibre par rapport à un repère galiléen  $R_0 (0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ , si au cours du temps, chaque point de {E} conserve une position fixe dans le repère considéré. Lorsqu'un système matériel {E} est en équilibre, le torseur associé à l'ensemble des actions mécaniques extérieures à {E} est nul.

$$\mathcal{T}_{A (\bar{E} \rightarrow E)} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(\bar{E} \rightarrow E)} \\ \vec{M}_{A (\bar{E} \rightarrow E)} \end{array} \right\}_{Axyz} = 0 \quad \forall A$$

soit  $\vec{R}_{(\bar{E} \rightarrow E)} = \vec{0}$  et  $\vec{M}_{A (\bar{E} \rightarrow E)} = \vec{0}$

Soit un solide {E} soumis à trois actions mécaniques extérieures de solides  $M_1, M_2$  et  $M_3$ . Il est possible d'écrire le torseur de chaque action mécanique sur le solide étudié {E} en un point particulier puis en les exprimant en un même point de recherche le torseur résultant de l'ensemble des actions mécaniques.

$$\mathcal{T}_{A (M_1 \rightarrow E)} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(M_1 \rightarrow E)} \\ \vec{M}_{A (M_1 \rightarrow E)} \end{array} \right\}_{Axyz}, \quad \mathcal{T}_{B (M_2 \rightarrow E)} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(M_2 \rightarrow E)} \\ \vec{M}_{B (M_2 \rightarrow E)} \end{array} \right\}_{Bxyz} \quad \text{etc}$$

Si ces actions sont en parallèles, le torseur résultant est égal à la somme des torseurs

$$\mathcal{T}_{A (\bar{E} \rightarrow E)} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(\bar{E} \rightarrow E)} \\ \vec{M}_{A (\bar{E} \rightarrow E)} \end{array} \right\}_{Axyz} = \mathcal{T}_{A (M_1 \rightarrow E)} \oplus \mathcal{T}_{A (M_2 \rightarrow E)} \oplus \mathcal{T}_{A (M_3 \rightarrow E)}$$

où  $\oplus$  représente l'opérateur addition de torseur, soit une addition membre à membre.

### Théorème des actions mutuelles

Soit une bille posée sur une table en contact en un point M. Cette bille est sous l'action de deux forces : une force de pesanteur  $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$  et une force de réaction de la table sur la bille  $\vec{R}_{(Table \rightarrow Bille)}$ .

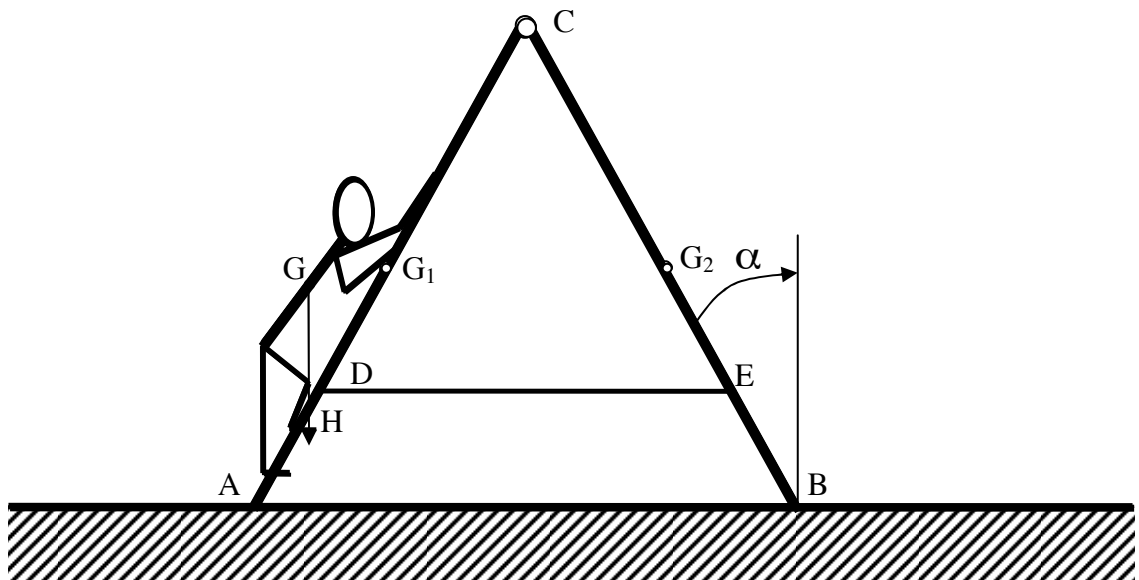
$$\vec{P} + \vec{R}_{(Table \rightarrow Bille)} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \vec{P} = -\left[ \vec{R}_{(Table \rightarrow Bille)} \right] = \vec{R}_{(Bille \rightarrow Table)}$$

Lorsque le nombre d'inconnues est plus important que celui d'équation, le système est dit hyperstatique et les équations de déformations sont nécessaires pour résoudre le problème. Il est possible de spécifier des conditions géométriques pour permettre le fonctionnement du mécanisme.

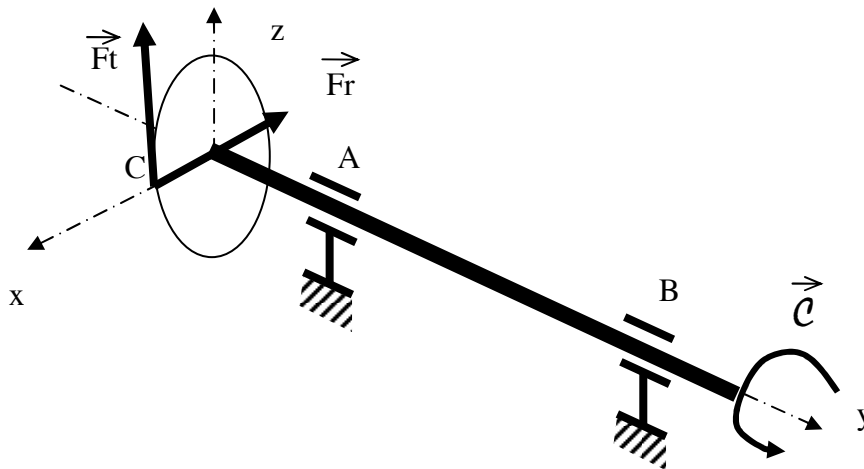
## Exercice n° 1 : Actions mécaniques dans une échelle

Considérons une échelle double de longueur  $L$  de 4 m et une personne sur cette échelle à une hauteur  $\lambda L$  avec  $0 < \lambda < 1$ . Le poids de chaque élément d'échelle est de 100 N et les centres de gravité  $G_1$  et  $G_2$  peuvent être considérés au milieu de chaque montant (1 et 2) de l'échelle. Le poids de la personne est de 700 N appliqué au point  $G$  et projeté sur l'échelle au point  $H$  tel que  $AH = \lambda L$ . Pour la sécurité, une chaîne permet de relier deux barreaux d'échelle (hauteur de  $\frac{1}{4}$  de  $L = AD = BE$ ) afin d'éviter une ouverture intempestive en considérant l'absence de frottement entre le sol et les pieds de l'échelle en  $A$  et  $B$ . L'angle  $\alpha$  entre l'échelle et la normale au sol peut être variable mais nous pourrions le prendre à  $20^\circ$ .

- 1°) Calculer la variation des actions de l'échelle sur le sol en fonction du paramètre  $\lambda$ .
- 2°) Calculer l'action au point  $C$  entre les deux montants de l'échelle.
- 3°) En l'absence de la chaîne  $DE$ , quelles sont les conditions pour l'équilibre statique du système ?



## Exercice n° 2 : Effort dans un arbre scie à bûche



Le schéma ci-dessus représente un banc de sciage composé d'un axe guidé en A et B sur lequel est montée une scie de rayon OC. Un couple moteur est appliqué en extrémité de l'arbre pour obtenir une coupe au point C. Deux composantes d'effort sont appliquées par la bûche à couper avec un effort tangentiel  $F_t$  et un effort radial  $F_r$ .

Le système d'axe en repère direct, sera positionné avec l'axe y sur l'axe de la scie, l'axe x dans la direction OC et l'axe z vertical vers le haut. Dans ce système d'axe, on donne, en millimètre :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= 200 \cdot \vec{x} & ; \\ \overrightarrow{OA} &= 150 \cdot \vec{y} & ; \\ \overrightarrow{AB} &= 400 \cdot \vec{y} & ;\end{aligned}$$

Pour l'effort en C, l'action tangentielle de coupe est de 750 N. La composante radiale de la bûche sur la lame de scie est horizontale sur - x et est égale à 250 N.

Pour une résolution littérale, on posera  $l = 400$  mm,  $m = 150$  mm,  $r = 200$  mm,

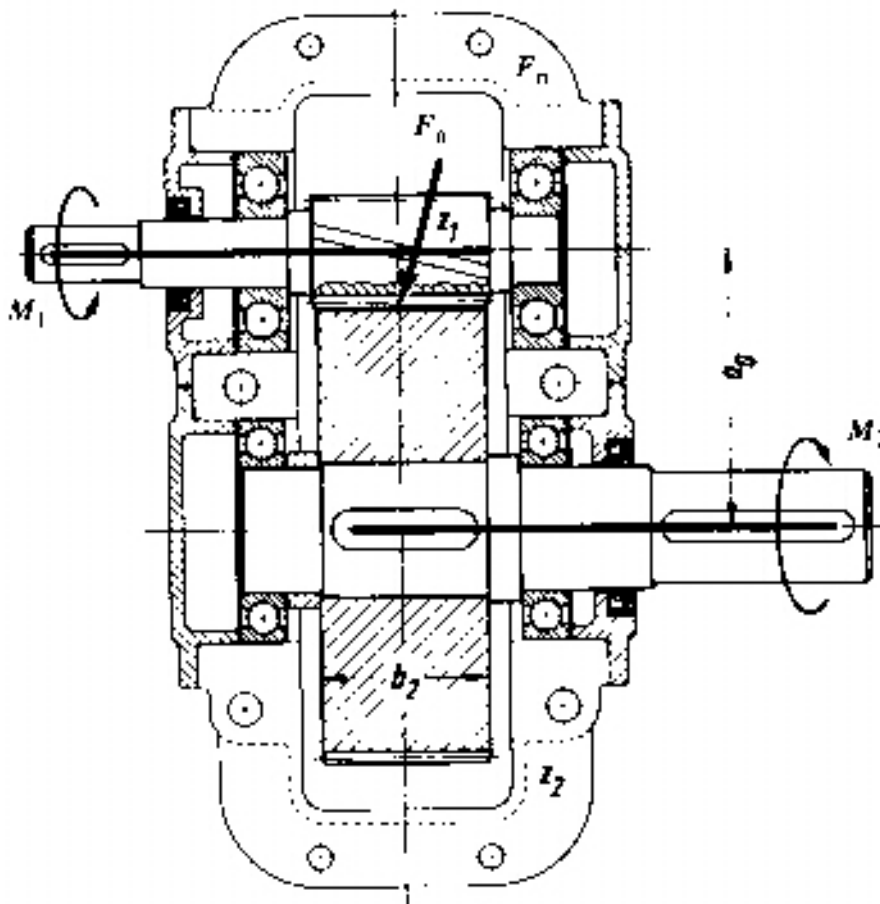
Calculer le couple nécessaire à la coupe dans l'arbre OB.

Calculer les actions dans les paliers A et B.

### Exercice n° 3 : Etude d'un réducteur de vitesse

La figure définit un réducteur de vitesse dont le rapport est donné par le rapport inverse des nombres de dents des engrenages. On fera l'hypothèse d'un rendement égal à 1. L'arbre 1 est l'arbre moteur animé par un moteur asynchrone avec un couple moteur de 8 N.m, à une fréquence de rotation de 1450 tr/min. Il en résulte une action  $F_n$  de l'engrenage 1 sur la couronne dentée 2 que l'on peut décomposer avec un effort tangentiel, un effort radial et un effort axial. Le nombre de dent de l'engrenage 1 est de 19 dents et celui de l'engrenage 2 et de 85 dents. L'angle normalisée de pression dans les engrenages hélicoïdaux est de  $20^\circ$  et l'angle d'hélice, de  $15^\circ$ .

- 1) Déterminer le couple et la vitesse de sortie de l'arbre 2
- 2) Calculer les actions mécaniques sur les roulements de l'arbre d'entrée pour assurer la transmission (ce calcul permet de prévoir la durée de vie de ces roulements par un calcul de fiabilité).



## LE FROTTEMENT

La modélisation des liaisons dans les deux chapitres précédents, s'est faite en supposant des contacts sans frottement. Cette hypothèse simplificatrice, lorsqu'elle est possible, permet la résolution de certains problèmes. Par contre, pour d'autres, elle conduit à des impossibilités d'équilibre contraire à la réalité (exemple : une échelle contre un mur, une voiture sur la route).

Considérons deux solides  $S_1$  et  $S_2$  en contact par une surface (définition d'un plan tangent commun aux deux surfaces). La résultante des actions de contact entre ces deux solides peut se décomposer en deux projections :

- ❖ Une composante perpendiculaire au plan tangent dite composante normale ;
- ❖ Une composante parallèle au plan tangent dite composante tangentielle.

$$\vec{F}_P(S_1 \longrightarrow S_2) = \vec{N}_P(S_1 \longrightarrow S_2) + \vec{T}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$$

### 1. ENONCE DE LA LOI DE COULOMB

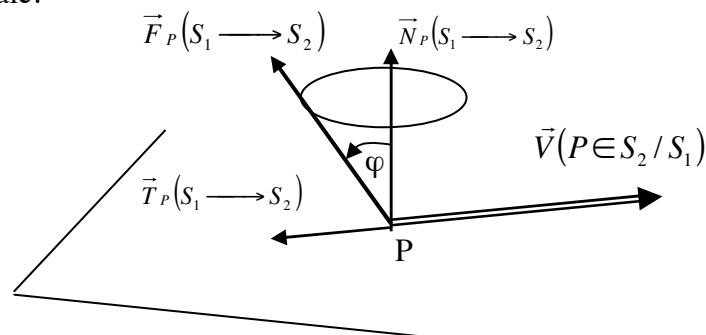
Dans le cas d'une vitesse relative de  $S_2$  par rapport à  $S_1$ , la composante tangentielle de la résultante des actions de contact de  $S_1$  sur  $S_2$  est opposée à cette vitesse de glissement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$ .

$$\begin{aligned} \vec{T}_P(S_1 \longrightarrow S_2) \wedge \vec{V}(P \in S_2 / S_1) &= \vec{0} \\ \vec{T}_P(S_1 \longrightarrow S_2) \cdot \vec{V}(P \in S_2 / S_1) &> 0 \end{aligned}$$

De plus la composante tangentielle est proportionnelle à la composante normale telle que :

$$\|\vec{T}_P(S_1 \longrightarrow S_2)\| = f \cdot \|\vec{N}_P(S_1 \longrightarrow S_2)\|$$

$f$  est le coefficient de frottement en P entre  $S_1$  et  $S_2$ . En introduisant l'angle  $\varphi$  d'inclinaison de la force  $\vec{F}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$  par rapport à la perpendiculaire au plan tangent du contact entre  $S_1$  et  $S_2$ , le coefficient de frottement  $f = \tan \varphi$  est égal au rapport de la composante tangentielle sur la composante normale.

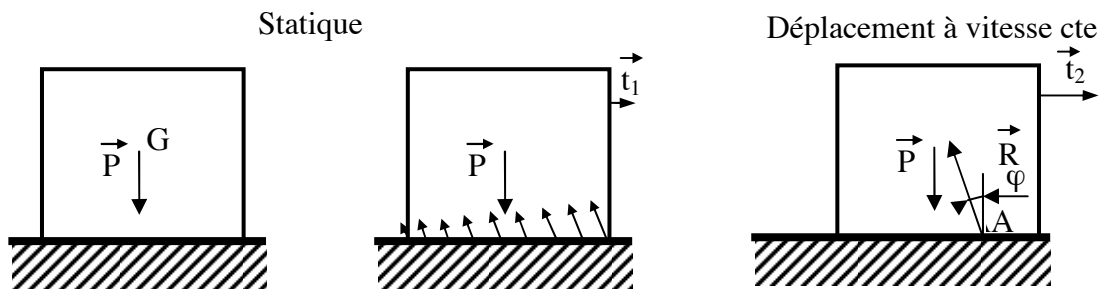


Dans un deuxième cas où le mouvement entre  $S_1$  et  $S_2$  n'existe pas, lorsqu'il n'y a pas de glissement en P entre  $S_1$  et  $S_2$ , la résultante des forces de contact se trouve à l'intérieur ou sur une génératrice du cône de frottement. Ce cône de frottement est construit avec un

sommet au point P, un axe suivant la perpendiculaire au plan tangent et avec un demi-angle au sommet égal à  $\varphi$ . Ceci se traduit par la relation :

$$\left\| \vec{T}_P(S_1 \longrightarrow S_2) \right\| \leq f \cdot \left\| \vec{N}_P(S_1 \longrightarrow S_2) \right\|$$

En toute rigueur, nous devrions parler d'un coefficient d'adhérence qui est légèrement supérieur au coefficient de frottement  $f$  (de l'ordre de 10 à 20%). Lorsque l'on veut obtenir le glissement d'un objet sur le sol, l'effort pour obtenir le mouvement est supérieur à l'effort pour entretenir ce mouvement.



Matériaux en contact	$f = \tan \varphi$
Acier sur Acier	0,15
Acier sur Fonte	0,10
Acier sur Bronze	0,10
Acier sur PTFE (Téflon)	0,04
Acier sur Glace	0,02
Roulement d'un cylindre sur plan (Acier)	0,002 à 0,01
Bois sur Bois	0,40
Garniture de friction sur Acier	0,30
Caoutchouc sur Acier	0,50
Pneus sur route	0,6 à 0,9
Pneus sur route mouillée	0,1 à 0,4

La présence d'un lubrifiant permet de réduire considérablement les frottements.

## 2. ROLE DU LUBRIFIANT

En pratique le rôle de la lubrification se décompose en différentes fonctions :

### - Réduire le frottement

L'interposition d'un film de lubrifiant entre les surfaces métalliques en mouvement entraîne des diminutions plus ou moins sensibles du coefficient de frottement. Ceci se traduit par une diminution très sensible de l'usure et des économies d'énergie importantes.

### - Réduire l'usure

### - Absorber et évacuer les calories

La plus grande partie du travail des forces de frottement est transformée en chaleur. Le lubrifiant, par sa présence, assure le refroidissement des organes mécaniques.

### - Assurer l'étanchéité

Assurer l'étanchéité tant interne (segmentation moteur), qu'externe (presse étoupe).

### - Évacuer les impuretés

Généralement les impuretés sont retenues par un filtre placé sur le circuit du lubrifiant.

### - Éviter la corrosion du matériel.

La **tribologie** regroupe les sciences et techniques concernant les surfaces qui exercent une action réciproque et se trouvent en mouvement relatif les unes par rapport aux autres, ainsi que des problèmes apparentés.

La tâche est d'étudier le frottement et ses répercussions et résoudre les problèmes se posant dans les systèmes à frottement et usure. Selon la définition, l'usure est le processus par lequel se produit une perte de matériau progressive sur la surface d'un corps solide à la suite d'une sollicitation tribologique. Les interactions des éléments sous l'influence des charges extérieures sont déterminantes, en valeur, nombre et fréquence (sollicitation globale) pour le comportement à l'usure du système tribologique. Ces interactions peuvent avoir des formes très différentes.

Pour simplifier, on peut déterminer trois grands types d'usure :

- *l'usure physique*, qui relève de la constitution du métal et de sa fatigue, et pour laquelle le rôle du lubrifiant est limité.

- *l'usure chimique*, qui est essentiellement l'usure corrosive. Les lubrifiants ont naturellement des propriétés anticorrosives qui peuvent être renforcées selon l'utilisation envisagée.

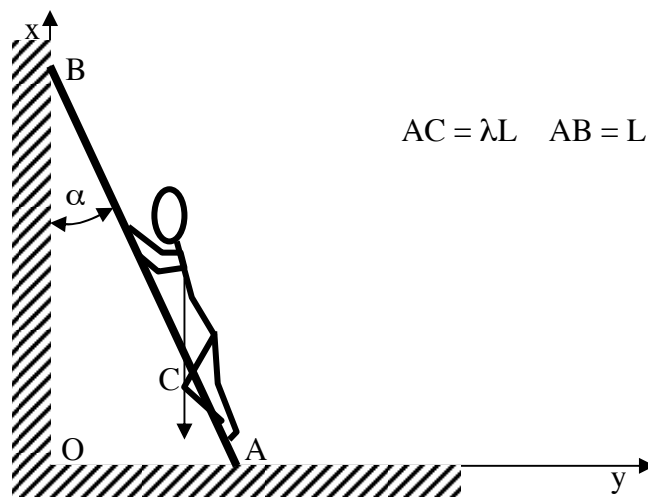
- *l'usure mécanique que l'on peut décomposer en 4 sous-familles :*

• l'usure par jonction intermétallique (microsoudure ou adhésion). Lorsque deux pièces métalliques frottent l'une sur l'autre, il se produit localement des microsoudures, qui lors de leur rupture sous l'effet du mouvement, libèrent des particules, plus ou moins grosses, arrachées à la pièce la plus tendre. Le lubrifiant dans ce cas a pour rôle de limiter les contacts en formant un film continu.

• l'usure par abrasion, qui résulte du frottement des pièces mobiles avec interposition de particules métalliques entre elles. Dans ce cas le lubrifiant doit assurer l'enrobage des particules pour limiter leur action et assurer les évacuations.

• l'usure par fatigue, l'endommagement des surfaces de contact se produit par l'interposition, de manière cyclique et sous charge, de particules ayant une grosseur supérieure au jeu nominal. La détérioration se fait par fissuration des surfaces de contact et libération de petites particules (écaillage). Dans ce cas, ce n'est pas la qualité du lubrifiant mais surtout sa "propreté" qui importe, c'est à dire sa pollution solide.

• l'usure par érosion, est provoquée par le choc des particules solides ou fluides animées de grandes vitesses ou sous fortes pressions. Dans ce cas, le lubrifiant a pour rôle d'enrober les particules solides pour les neutraliser ou d'interposer éventuellement une surface protectrice.

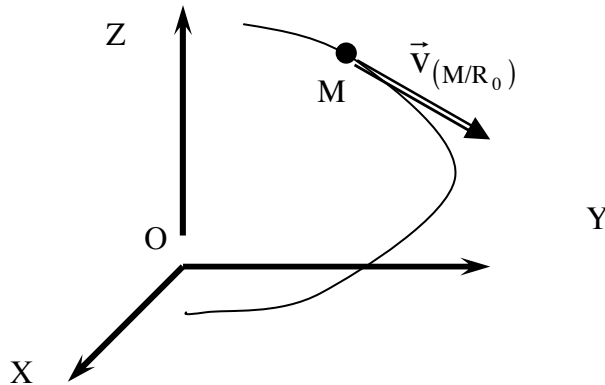


Chapitre 4

# LA CINEMATIQUE

## 1. LA VITESSE D'UN POINT MATERIEL

Soit un point M mobile dans un référentiel R(O, x, y, z, t)



On appelle vitesse de ce point M par rapport au référentiel R, la dérivée du vecteur position du point M par rapport au temps t soit :

$$\vec{v}_{(M/R_0)} = \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM}_{(t)} \right]_{R_0}$$

Lorsque le repère dans lequel le mouvement est étudié, est cartésien, la position du point M

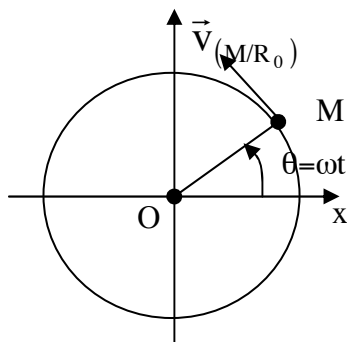
s'écrit :

$$\left[ \overrightarrow{OM}_{(t)} \right] = x_M \cdot \vec{i}_0 + y_M \cdot \vec{j}_0 + z_M \cdot \vec{k}_0$$

La vitesse du point M dans le repère R<sub>0</sub> peut donc s'écrire

$$\left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM}_{(t)} \right]_{R_0} = \dot{x}_M \cdot \vec{i}_0 + \dot{y}_M \cdot \vec{j}_0 + \dot{z}_M \cdot \vec{k}_0$$

*Exemple* : mouvement circulaire du point M tel que la trajectoire sera un cercle de centre O dans un plan (O,  $\vec{i}_0, \vec{j}_0$ ).



$$\left[ \overrightarrow{OM}_{(t)} \right]_{R_0} = l \cos \omega t \cdot \vec{i}_0 + l \cdot \sin \omega t \cdot \vec{j}_0$$

$$\vec{v}_{(M/R_0)} = \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM}_{(t)} \right]_{R_0} = -l\omega \cdot [\sin \omega t \cdot \vec{i}_0 - \cos \omega t \cdot \vec{j}_0]$$



## 2. L'ACCELERATION D'UN POINT MATERIEL

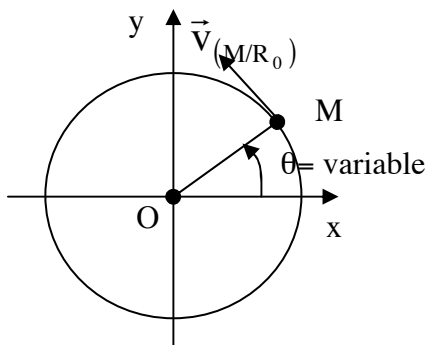
On appelle accélération d'un point M par rapport au référentiel R(O, x, y, z, t), la dérivée du vecteur vitesse du point M par rapport au temps t soit :

$$\vec{a}_{(M/R)} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{v}_{(M/R)} \right]$$

L'accélération est aussi la dérivée seconde de la position par rapport au temps.

$$\vec{a}_{(M/R)} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{v}_{(M/R)} \right] = \ddot{x}_M \cdot \vec{i}_0 + \ddot{y}_M \cdot \vec{j}_0 + \ddot{z}_M \cdot \vec{k}_0$$

*Exemple* : mouvement circulaire uniformément varié du point M tel que la trajectoire sera un cercle de centre O dans un plan (O,  $\vec{i}_0, \vec{j}_0$ ). Ce mouvement correspond au ralentissement d'un moteur électrique après déclenchement de son contacteur.



$$\left[ \overrightarrow{OM}_{(t)} \right]_{R_0} = \ell \cos \omega t \cdot \vec{i}_0 + \ell \cdot \sin \omega t \cdot \vec{j}_0$$

$$\theta = \frac{1}{2} \dot{\omega} \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \theta_0$$

avec      pour  $t_1 \Rightarrow \theta = \theta_1$  et  $\omega = \omega_1$   
             pour  $t_2 \Rightarrow \theta = \theta_2$  et  $\omega = 0$

## 3. EQUATION DE CHANGEMENT DE REPERE

L'objectif est de déterminer la relation qui existe entre la dérivée d'un vecteur variable  $\vec{U}_{(t)}$  en fonction du temps dans la base  $R_0 (0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  et la dérivée de ce même vecteur dans la base d'un repère. Ce vecteur  $\vec{U}_{(t)}$  peut s'écrire dans les deux repères  $R_0 (0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  et  $R_1 (K, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ . Dans le repère  $R_1$ , le vecteur considéré peut s'écrire :

$$\vec{U}_{(t)} = x_1 \cdot \vec{i}_1 + y_1 \cdot \vec{j}_1 + z_1 \cdot \vec{k}_1$$

Calculons la dérivée de ce vecteur dans le repère  $R_0$ .

$$\left[ \frac{d}{dt} \vec{U}_{(t)} \right]_{R_0} = \dot{x}_1 \cdot \vec{i}_1 + \dot{y}_1 \cdot \vec{j}_1 + \dot{z}_1 \cdot \vec{k}_1 + \left[ \frac{d}{dt} \vec{i}_{1(t)} \right]_{R_0} + \left[ \frac{d}{dt} \vec{j}_{1(t)} \right]_{R_0} + \left[ \frac{d}{dt} \vec{k}_{1(t)} \right]_{R_0}$$

or  $\left[ \frac{d}{dt} \vec{U}_{(t)} \right]_{R_1} = \dot{x}_1 \cdot \vec{i}_1 + \dot{y}_1 \cdot \vec{j}_1 + \dot{z}_1 \cdot \vec{k}_1$       et  $\left[ \frac{d}{dt} \vec{i}_{1(t)} \right]_{R_0} = \vec{\Omega}_{(R_1/R_0)} \wedge \vec{i}_1$

soit

$$\left[ \frac{d}{dt} \vec{U}(t) \right]_{R_0} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{U}(t) \right]_{R_1} + \vec{\Omega}_{(R_1/R_0)} \wedge \vec{U}(t)$$

Cette formule de dérivation est très importante. Elle permet de dériver une position ou une vitesse par rapport à  $R_0$  alors que le vecteur est exprimé dans le repère  $R_1$ .

#### 4. LA CINEMATIQUE DU SOLIDE

On appelle solide en cinématique, un système indéformable dont les distances mutuelles entre points sont invariables au cours du temps. Cette notion théorique s'appelle solide parfait par rapport à son propre référentiel  $R_1 (\vec{K}, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ .

Soit un repère fixe  $R_0 (0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  et un point M appartenant à un solide parfait de repère  $R_1$ .

Le champ des vitesses des points M de ce solide parfait dans le mouvement de  $R_1$  par rapport à  $R_0$  est équiprojectif et antisymétrique. Il peut s'écrire sous la forme :

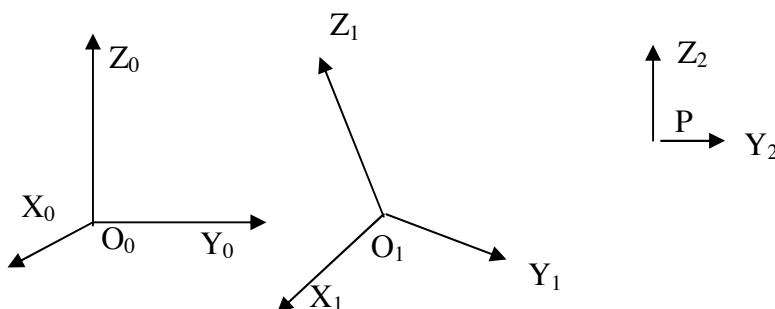
$$\left[ \vec{V}_{(M \in R_1 / R_0)} \right]_{R_0} = \left[ \vec{V}_{(K \in R_1 / R_0)} \right]_{R_0} + \overrightarrow{MK} \wedge \vec{\Omega}_{(R_1 / R_0)}$$

L'ensemble constitué par le vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{(R_1 / R_0)}$  et par le champ antisymétrique des vitesses constitue le torseur cinématique. Le vecteur rotation constitue la résultante invariable du torseur et le vecteur vitesse, le moment du torseur.

Ce torseur permet d'écrire la vitesse en tout point d'un solide en mouvement.

#### 5. COMPOSITION DE MOUVEMENT

Considérons 3 repères  $R_2, R_1, R_0$  dans lequel  $R_2$  serait le repère de la pièce étudiée en mouvement sur une autre pièce munie d'un repère  $R_1$ , elle-même en mouvement dans un repère  $R_0$ . (Un marin P qui monte dans la mature d'un trois mats qui se déplace sur la mer avec un léger tangage et un peu de roulis) Nous nous proposons d'étudier les vitesses et les accélérations.



$$\begin{aligned} \left[ \vec{v}_{(P \in R_2 / R_0)} \right] &= \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{O_0 P} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{O_0 O_1} \right]_{R_0} + \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{O_1 P} \right]_{R_0} \\ \left[ \vec{v}_{(P \in R_2 / R_0)} \right] &= \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{O_0 O_1} \right]_{R_0} + \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{O_1 P} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}_{(R_1 / R_0)} \wedge \overrightarrow{O_1 P} \end{aligned}$$

$$\boxed{\left[ \vec{v}_{(P \in R_2 / R_0)} \right] = \left[ \vec{v}_{(P \in R_2 / R_1)} \right] + \left[ \vec{v}_{(P \in R_1 / R_0)} \right]}$$

La vitesse absolue est égale à la somme de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement

Si nous prenons deux points M et P liés à  $R_2$ , la démonstration précédente permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \left[ \vec{v}_{(M \in R_2 / R_0)} \right]_{R_0} &= \left[ \vec{v}_{(K \in R_2 / R_0)} \right]_{R_0} + \overrightarrow{MP} \wedge \vec{\Omega}_{(R_2 / R_0)} \\ \left[ \vec{v}_{(M \in R_2 / R_1)} \right]_{R_0} &= \left[ \vec{v}_{(K \in R_2 / R_1)} \right]_{R_0} + \overrightarrow{MP} \wedge \vec{\Omega}_{(R_2 / R_1)} \\ \left[ \vec{v}_{(M \in R_1 / R_0)} \right]_{R_0} &= \left[ \vec{v}_{(K \in R_1 / R_0)} \right]_{R_0} + \overrightarrow{MP} \wedge \vec{\Omega}_{(R_1 / R_0)} \end{aligned}$$

On en déduit donc  $\boxed{\vec{\Omega}_{(R_2 / R_0)} = \vec{\Omega}_{(R_2 / R_1)} + \vec{\Omega}_{(R_1 / R_0)}}$

Composer deux mouvements revient à additionner des deux torseurs cinématiques correspondants.

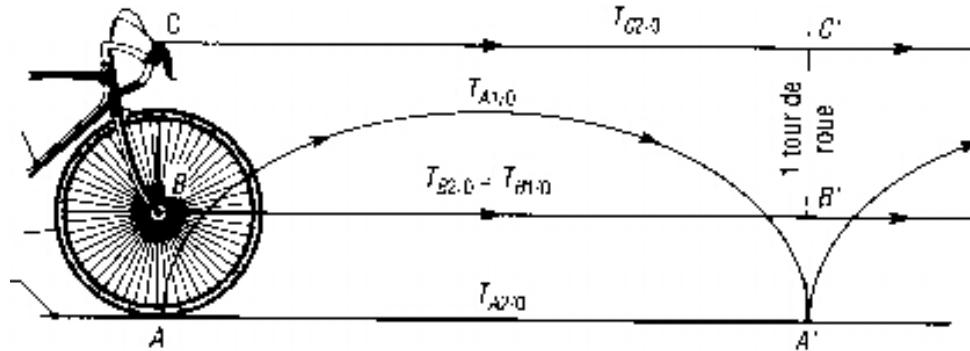
La composition des accélérations peut s'écrire en dérivant les vecteurs vitesse :

$$\begin{aligned} \left[ \overrightarrow{a}_{(P \in R_2 / R_0)} \right] &= \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{v}_{(P \in R_2 / R_0)} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{v}_{(P \in R_1 / R_0)} \right]_{R_0} + \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{v}_{(P \in R_2 / R_1)} \right]_{R_0} \\ \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{v}_{(P \in R_2 / R_1)} \right]_{R_0} &= \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{v}_{(P \in R_2 / R_1)} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}_{(R_1 / R_0)} \wedge \overrightarrow{v}_{(P \in R_2 / R_1)} \\ \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{v}_{(P \in R_1 / R_0)} \right]_{R_0} &= \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{v}_{(O_1 \in R_1 / R_0)} \right]_{R_0} + \left[ \frac{d}{dt} \left( \overrightarrow{PO_1} \wedge \vec{\Omega}_{(R_1 / R_0)} \right) \right]_{R_0} \\ &= \left[ \overrightarrow{a}_{(O_1 \in R_1 / R_0)} \right]_{R_0} + \vec{\Omega}_{(R_1 / R_0)} \wedge \left[ \frac{d}{dt} \left( \overrightarrow{O_1 P} \right) \right]_{R_1} + \vec{\Omega}_{(R_1 / R_0)} \wedge \left( \overrightarrow{O_1 P} \right) + \left[ \frac{d}{dt} \left( \vec{\Omega}_{(R_1 / R_0)} \right) \right]_{R_0} \wedge \left( \overrightarrow{O_1 P} \right) \\ &= \left[ \overrightarrow{a}_{(O_1 \in R_1 / R_0)} \right]_{R_0} + \left[ \frac{d}{dt} \left( \vec{\Omega}_{(R_1 / R_0)} \right) \right]_{R_0} \wedge \left( \overrightarrow{O_1 P} \right) + \vec{\Omega}_{(R_1 / R_0)} \wedge \left( \vec{\Omega}_{(R_1 / R_0)} \wedge \left( \overrightarrow{O_1 P} \right) \right) + \vec{\Omega}_{(R_1 / R_0)} \wedge \left[ \overrightarrow{v}_{(P \in R_2 / R_1)} \right] \end{aligned}$$

Un terme supplémentaire apparaît  $2 \left( \vec{\Omega}_{(R_1 / R_0)} \wedge \overrightarrow{v}_{(P \in R_2 / R_1)} \right)$  appelé accélération de Coriolis  
L'accélération absolue est égale à la somme de l'accélération relative, de l'accélération d'entraînement et de l'accélération de Coriolis.

## Exercice n° 5 : Etude d'un vélo

La figure représente la trajectoire du bouchon de chambre à air d'une roue de vélo.



- 1) Donner l'équation du point A dans un repère absolu (roue de 650 mm).
- 2) En déduire l'équation de la trajectoire d'un système réfléchissant dans les rayons de la roue au point M tel que  $BM = \lambda R$  avec  $0 > \lambda > 1$
- 3) Calculer la vitesse et l'accélération du point M par rapport au repère  $R_0$
- 4) Calculer la distance parcourue pour un tour de pédale pour un VTT sachant que le pédalier a 28, 38, 48 dents et le pignon arrière a 13, 15, 17, 20, 23, 27, 30 dents.

### 6. TORSEUR CINEMATIQUE

Pour représenter le mouvement entre deux solides, il est possible d'utiliser un torseur cinématique exprimant les vitesses entre les solides.

Un torseur est un couple ordonné de deux vecteurs exprimé en un point donné du repère. Le premier vecteur est invariable et s'appelle la résultante du torseur. Le deuxième vecteur est le moment du torseur exprimé en un point donné du repère.

Il se compose d'une résultante ou vecteur vitesse angulaire invariable et d'un moment soit le vecteur de la vitesse linéaire, défini en un point qui peut s'écrire :

$$\mathbf{v}_o(\frac{1}{2}) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(\frac{1}{2}) \\ \vec{V}_o(\frac{1}{2}) \end{array} \right\}_{\text{Oxyz}} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha}(\frac{1}{2}) \quad \dot{u}(\frac{1}{2}) \\ \dot{\beta}(\frac{1}{2}) \quad \dot{v}(\frac{1}{2}) \\ \dot{\gamma}(\frac{1}{2}) \quad \dot{w}(\frac{1}{2}) \end{array} \right\}_{\text{Oxyz}}$$

$$\text{soit } \vec{\Omega}(\frac{1}{2}) = \dot{\alpha}(\frac{1}{2}) \vec{i} + \dot{\beta}(\frac{1}{2}) \vec{j} + \dot{\gamma}(\frac{1}{2}) \vec{k}$$

$$\vec{V}_o(\frac{1}{2}) = \dot{u}(\frac{1}{2}) \vec{i} + \dot{v}(\frac{1}{2}) \vec{j} + \dot{w}(\frac{1}{2}) \vec{k}$$

Ce torseur présente les trois mouvements de rotation ainsi que les trois mouvements de translation sous la forme des composantes du vecteur vitesse.

Le freinage d'une automobile dépend de la qualité de la route, de l'état et du type de frein, de l'état des amortisseurs, mais la sécurité routière donne des valeurs de distance de freinage en fonction de la route mouillée ou de la route sèche.

La voiture roule à 90 km/h avant de découvrir l'existence d'un mur indéformable et fixe

## Exercice n° 6 : Etude d'un ralentissement d'une automobile



1. Calculer la décélération du véhicule si le freinage sur route sèche se fait sur 54 m
2. Calculer l'action du frein lors de ce freinage
3. Calculer la vitesse du véhicule au bout de 30 m de freinage
4. Calculer la décélération pour un arrêt en 80 cm
5. Calculer l'action sur la ceinture de sécurité lors de cet arrêt
6. Calculer l'énergie cinétique d'un véhicule de 800 kg à 90 km/h

Chapitre 5

# LA RESISTANCE DES MATERIAUX

## 1. HYPOTHESES

Hypothèse de Saint Venant :

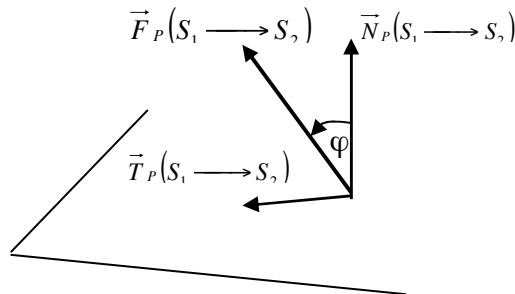
Les résultats de la Résistance des Matériaux ne s'appliquent qu'à une certaine distance de la région d'application de charges concentrées.

Hypothèse de Navier et Bernoulli :

Les sections planes, normales aux fibres avant déformation, demeurent planes et perpendiculaires aux fibres après déformation.

Définition d'une contrainte normale et tangentielle

Si on considère un solide {E} sur lequel sont appliqués des efforts et que que l'on effectue une coupe fictive entre deux tronçons E1 et E2.



Pour un élément de surface  $ds$  de cette surface, il existe un élément de force de cohésion de la matière  $\vec{df}$  décomposable en une projection normale à la surface  $dfn$  et une projection  $dft$  dans le plan de cette coupe.

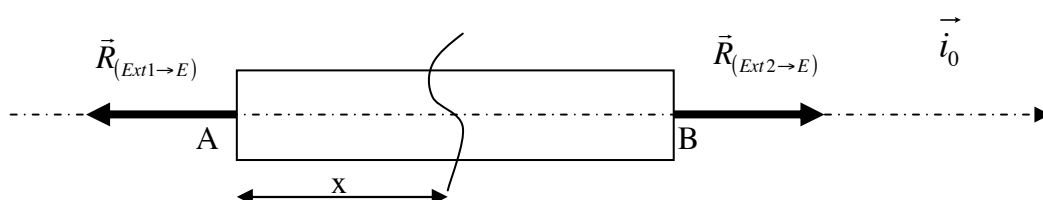
On appelle Contrainte Normale :  $\sigma = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{dfn}{ds}$

On appelle Contrainte Tangentielle :  $\tau = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{dft}{ds}$

## 2 LA TRACTION

Soit une poutre {E} travaillant en extension simple dans un référentiel  $R_0(0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$

Dans ce cas, les torseurs associés aux actions mécaniques de liaison, auxquelles sont soumises chacune des extrémités, se réduisent au centre de surface de ces sections extrêmes à une résultante axiale qui tend à allonger la poutre.



Soit l'étude d'un premier tronçon  $E_1$  de cette poutre d'une longueur  $x$  en cohésion avec un deuxième tronçon  $E_2$ .

L'écriture du principe fondamental de la statique permet d'écrire les torseurs des actions en A et de la cohésion de la matière entre les deux tronçons  $E_1$  et  $E_2$ . Le point G est le centre de gravité de la section considérée entre  $E_1$  et  $E_2$ .

$$\mathcal{T}_{A (E_1 \rightarrow E_2)} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(E_1 \rightarrow E_2)} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{Axyz}, \quad \mathcal{T}_G (E_2 \rightarrow E_1) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(E_2 \rightarrow E_1)} \\ \vec{M}_G (E_2 \rightarrow E_1) \end{array} \right\}_{Gxyz}$$

L'équilibre du système matériel conduit à écrire la somme des deux torseurs au point G.

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(E_1 \rightarrow E_2)} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{Gxyz} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(E_2 \rightarrow E_1)} \\ \vec{M}_G (E_2 \rightarrow E_1) \end{array} \right\}_{Gxyz} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

$$\vec{R}_{(E_2 \rightarrow E_1)} = - \left[ \vec{R}_{(E_1 \rightarrow E_2)} \right] = \iint_S \vec{\sigma} \cdot ds$$

Condition de résistance :

$$\sigma = \frac{F}{S} \leq Rpe \quad \text{avec} \quad Rpe = \frac{Rre}{\alpha}$$

On définit le Rpe comme la Résistance Pratique à l'Extension qui se calcule à partir de Rre, la Résistance à la Rupture à l'Extension.  $\alpha$  est un coefficient de sécurité permettant d'assurer la tenue de la pièce aux sollicitations mécaniques sans dépasser la limite d'élasticité Rre ou Résistance Elastique à l'Extension.

Un certain nombre de valeurs sont données dans le chapitre sur les matériaux.

La relation entre la contrainte et la déformation dans le domaine élastique permet d'écrire :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \text{soit} \quad \Delta \ell = \frac{F \cdot \ell}{S \cdot E} \quad \text{avec } E = \text{Module d'Young}$$

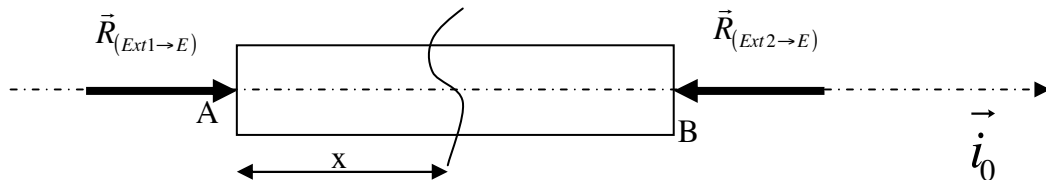
Matériaux	E (Mpa)	d	Rre (Mpa)
Carbure de tungstène	540 000		
Fibre de Carbone haut module	400 000	1,92	2 000
Tungstène	360 000		
Fibre de carbone haute résistance	250 000	1,75	2 800
Chrome	250 000	7,2	
Acier	210 000	7,8	360 à 2 000
Fonte Graphite Sphéroïdal	180 000	7,8	370 à 800
Fibre aramide (Kevlar)	130 000	1,45	2 700
Fonte Graphite Lamellaire	130 000	7,8	100 à 400
Cuivre	110 000	8,9	200 à 700
Titane	110 000	4,5	1 100

Matériaux	E (Mpa)	d	Rre (Mpa)
Fibre de verre	73 000	2,5	3 400
Aluminium	70 000	2,7	150 à 530
Magnésium	40 000	1,8	100 à 300
Béton	≈ 30 000	2,4	
Plomb	15 000	11,3	30
Polychlorure de Vinyle	2 400	1,38	50
Polyamide	1 300	1,14	65
Polyéthylène	1 200	0,95	32

### 3. LA COMPRESSION

Soit une poutre {E} travaillant en compression simple dans un référentiel  $R_0(0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$

Dans ce cas, les torseurs associés aux actions mécaniques de liaison, auxquelles sont soumises chacune des extrémités, se réduisent au centre de surface de ces sections extrêmes à une résultante axiale qui tend à raccourcir la poutre.



Soit l'étude d'un premier tronçon  $E_1$  de cette poutre d'une longueur  $x$  en cohésion avec un deuxième tronçon  $E_2$ .

L'écriture du principe fondamental de la statique permet d'écrire les torseurs des actions en A et de la cohésion de la matière entre les deux tronçons  $E_1$  et  $E_2$ . Le point G est le centre de gravité de la section considérée entre  $E_1$  et  $E_2$ .

$$\tau_{A (Ext_1 \rightarrow E)} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(Ext_1 \rightarrow E)} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{Axyz}, \quad \tau_G (E_2 \rightarrow E_1) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(E_2 \rightarrow E_1)} \\ \vec{M}_G (E_2 \rightarrow E_1) \end{array} \right\}_{Gxyz}$$

L'équilibre du système matériel conduit à écrire la somme des deux torseurs au point G.

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(Ext_1 \rightarrow E)} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{Gxyz} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(E_2 \rightarrow E_1)} \\ \vec{M}_G (E_2 \rightarrow E_1) \end{array} \right\}_{Gxyz} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

$$\vec{R}_{(E_2 \rightarrow E_1)} = - \left[ \vec{R}_{(Ext_1 \rightarrow E)} \right] = \iint_S \vec{\sigma} \cdot ds$$

Condition de résistance :

$$\sigma = \frac{F}{S} \leq R_{pc} \quad \text{avec} \quad R_{pc} = \frac{Rrc}{\alpha}$$



On définit le  $R_{pc}$  comme la Résistance Pratique à la Compression qui se calcule soit à partir de  $R_{rc}$ , la résistance à la Rupture à la Compression (Fonte, Béton, etc...) soit pour les aciers et les métaux non-ferreux à partir la Résistance à la Rupture à l'Extension.  $\alpha$  est un coefficient de sécurité permettant d'assurer la tenue de la pièce aux sollicitations mécaniques sans dépasser la limite d'élasticité  $R_{ec}$  ou Résistance Elastique à la Compression.

Remarque : la résistance à la rupture à la compression du béton est égale à 12 fois sa résistance à la rupture à la traction (utilisation du béton précontraint).

La relation entre la contrainte et la déformation dans le domaine élastique permet d'écrire :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \text{soit} \quad \Delta \ell = \frac{F \cdot \ell}{S \cdot E}$$

avec  $\sigma_x < 0$ ,  $F < 0$  et  $\Delta \ell < 0$

#### 4. LE CISAILLEMENT

Dans une Section  $\{S\}$  de normale  $\vec{n}$ , l'état de cisaillement pur est caractérisé en tout point de cette section par une contrainte normale nulle et une répartition uniforme de la contrainte tangentielle dans un référentiel  $R_0(0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ . Une Section  $\{S\}$  d'une poutre  $\{E\}$  est sollicitée au cisaillement pur si la réduction au centre de gravité G de la surface  $\{S\}$  du torseur de cohésion peut s'écrire :

$$\tau_{G(E_2 \rightarrow E_1)} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(E_2 \rightarrow E_1)} \\ \vec{M}_{G(E_2 \rightarrow E_1)} \end{array} \right\}_{G_{xyz}} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \vec{R}_{(E_2 \rightarrow E_1)} = T \cdot \vec{k}_0 \quad \text{ou} \quad \vec{R}_{(E_2 \rightarrow E_1)} = T \cdot \vec{j}_0 \\ \vec{M}_{G(E_2 \rightarrow E_1)} = \vec{0} \end{array}$$

Condition de résistance :

$$\tau = \frac{T}{S} \leq R_{pg} \quad \text{avec} \quad R_{pg} = \frac{Rrg}{\alpha}$$

On définit le  $R_{pg}$  comme la Résistance Pratique au glissement qui se calcule à partir de  $Rrg$ , la Résistance à la Rupture au glissement.  $\alpha$  est un coefficient de sécurité permettant d'assurer la tenue de la pièce aux sollicitations mécaniques sans dépasser la limite d'élasticité  $R_{eg}$  ou Résistance Elastique au glissement.

La relation entre la contrainte et la déformation dans le domaine élastique permet d'écrire :

$$\tau = G \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{avec} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \gamma$$

Pour les aciers doux et les alliages d'aluminium le  $R_{pg}$  est égal à 0,5  $R_{pe}$ .

Pour les aciers mi-durs, le  $R_{pg}$  est égal à 0,7  $R_{pe}$ .

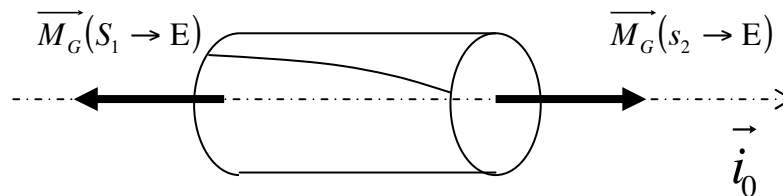
Pour les aciers à hautes résistances et les fontes, le  $R_{pg}$  est égal à 0,8  $R_{pe}$ .

## 5. LA TORSION

Considérons un solide  $\{E\}$  et une Section droite  $\{S\}$  de normale  $\vec{n}$  et de centre de gravité  $G$ , dans un référentiel  $R_0(0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ . Une Section  $\{S\}$  d'une poutre  $\{E\}$  est sollicitée en torsion pur si la réduction de la surface  $\{S\}$  du torseur de cohésion peut s'écrire :

$$\tau_{G(E_2 \rightarrow E_1)} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(E_2 \rightarrow E_1)} \\ \vec{M}_G(E_2 \rightarrow E_1) \end{array} \right\}_{Gxyz} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \vec{R}_{(E_2 \rightarrow E_1)} = \vec{0} \\ \vec{M}_G(E_2 \rightarrow E_1) = M_t \cdot \vec{i}_0 \end{array}$$

Soit un arbre cylindrique de révolution de rayon  $R$  et sollicité en torsion simple dans toutes ses sections droites  $\{S\}$  lorsqu'il est soumis à ses deux extrémités à des liaisons dont les torseurs associés se réduisent à deux torseurs couples opposés.



Sous l'action des moments, les sections planes et normales à l'axe  $O \vec{i}_0$  restent planes et normales. La distance entre deux sections reste sensiblement constante et le déplacement d'une section droite est uniquement une rotation d'angle  $\alpha$ . Cet angle  $\alpha$  est proportionnel à la distance  $x$  entre ces deux sections droite. La génératrice de ce cylindre se déforme suivant une hélice.

L'angle unitaire de torsion peut s'écrire :  $\theta = \frac{\alpha}{x}$

La contrainte tangentielle maximum est égale à :  $\tau = G\theta R = G \cdot \gamma$

Dans une section droite  $\{S\}$ , le moment au centre de gravité du torseur des efforts de cohésion a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{M}_G &= \iint_S \vec{GP} \wedge d\vec{f} = \iint_S \rho \tau \cdot ds \cdot \vec{i}_0 = M_t \cdot \vec{i}_0 \\ M_t &= \iint_S G \theta \rho^2 \cdot ds = G \theta \iint_S \rho^2 \cdot ds = G \theta \cdot I_0 \end{aligned}$$

Le terme  $I_0$  est le moment quadratique polaire et caractérise la capacité de résistance à la torsion d'une poutre. Si le Moment de torsion s'exprime en  $\text{mm}^3 \text{N}$ ,  $G$  le module de Coulomb en  $\text{Mpa}$  et  $\theta$  en  $\text{rad/mm}$ , le moment quadratique polaire s'exprime en  $\text{mm}^4$ .

Condition de résistance :

$$\tau = \frac{|Mt| \max}{\left(\frac{I_0}{v}\right)} \leq Rpg \quad \text{avec} \quad Rpg = \frac{Rrg}{\alpha}$$

et  $v$  = distance du point le plus éloigné de la fibre neutre

On définit le  $Rpg$  comme la Résistance Pratique au glissement qui se calcule à partir de  $Rrg$ , la Résistance à la Rupture au glissement.  $\alpha$  est un coefficient de sécurité permettant d'assurer la tenue de la pièce aux sollicitations mécaniques sans dépasser la limite d'élasticité  $Reg$  ou Résistance Elastique au glissement.

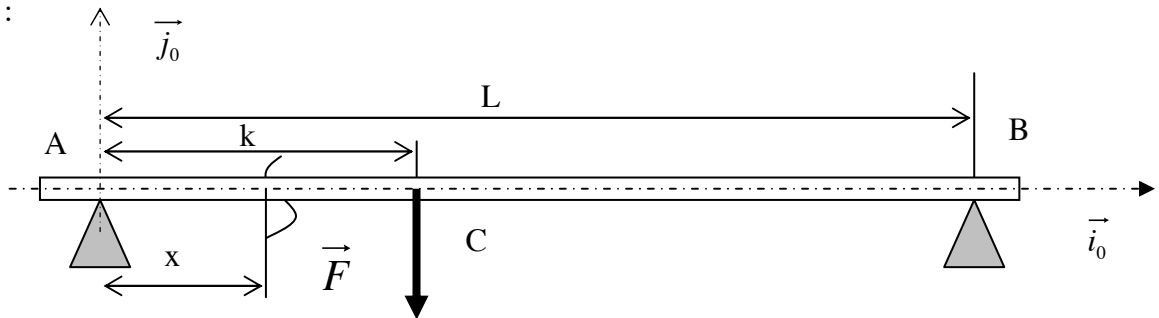
## 6. LA FLEXION

Considérons une poutre  $\{E\}$  d'axe  $O \vec{i}_0$  mise en flexion plane simple tel que le torseur de cohésion dans une Section droite  $\{S\}$  de normale  $\vec{n}$  et de centre de gravité  $G$  donne :

$$\mathcal{T}_{\text{Coh}} (E2 \rightarrow E1) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(E2 \rightarrow E1)} \\ \vec{M}_O (E2 \rightarrow E1) \end{array} \right\}_{Oxyz} = \left\{ \begin{array}{ll} N_{X(E2 \rightarrow E1)} = 0 & Mt_{X(E2 \rightarrow E1)} = 0 \\ T_{Y(E2 \rightarrow E1)} \neq 0 & Mf_{Y(E2 \rightarrow E1)} = 0 \\ T_{Z(E2 \rightarrow E1)} = 0 & Mf_{Z(E2 \rightarrow E1)} \neq 0 \end{array} \right\}_{Oxyz}$$

Le moment de flexion suivant l'axe  $z$  entraîne une flexion de la poutre suivant l'axe  $y$ .  
Le système de forces extérieures appliquées à cette poutre peut se réduire à un système coplanaire. Toutes les forces sont perpendiculaires à la ligne moyenne.

Exemple :



Une étude de statique permet de définir les actions aux appuis à savoir que :

$$\vec{R}_A = \|\vec{F}\| \cdot \frac{(L-k)}{L} \cdot \vec{j}_0 \quad \text{et} \quad \vec{R}_B = \|\vec{F}\| \cdot \frac{k}{L} \cdot \vec{j}_0$$

Le calcul du torseur de cohésion se définit à partir de l'étude de statique d'un tronçon de longueur  $x$  en équilibre sous l'action des forces extérieures (en faisant varier  $x$  de 0 à  $L$ ).

Pour  $x$  compris entre 0 et  $k$ ,  $T_{1(y)} = -R_A$  et  $Mf_{1(z)} = R_A \cdot x$

Pour  $x$  compris entre  $k$  et  $L$ ,  $T_{2(y)} = -R_A + F$  et  $Mf_{2(z)} = R_A \cdot x - F \cdot (x - k)$

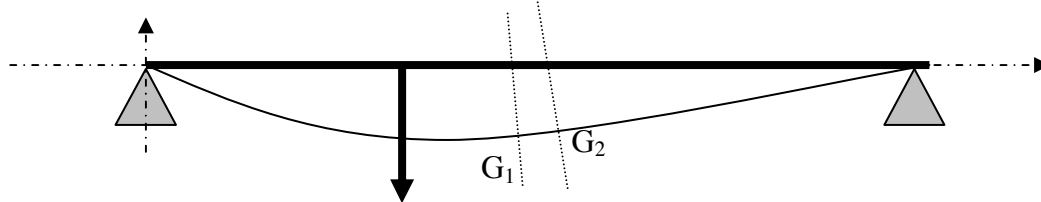
Le moment fléchissant maximum est situé au point  $C$  où  $Mf_{1(z)} = Mf_{2(z)} = R_A \cdot k = F(k - (k^2/L))$

La contrainte suivant l'axe  $x$ , peut se calculer en tout point de la section :  $\sigma_x = -\frac{Mf_z}{I_{Gz}} y$

En fait seule la contrainte maximum est recherchée pour laquelle  $v$  représente la fibre la plus éloignée de la fibre neutre :

$$|\sigma_x| = \frac{Mf_z}{I_{Gz}} \leq Rpe$$

L'étude de la déformée de la poutre permet de définir le rayon de courbure de la poutre et le déplacement suivant  $y$  de chaque point de la poutre.



En géométrie analytique, on peut démontrer que :  $R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \approx \frac{1}{y''}$

Or  $\sigma_x = -\frac{Mf_z}{I_{Gz}} y$  on peut en déduire que :  $E_x I_{Gz} \cdot y'' = Mf_z$

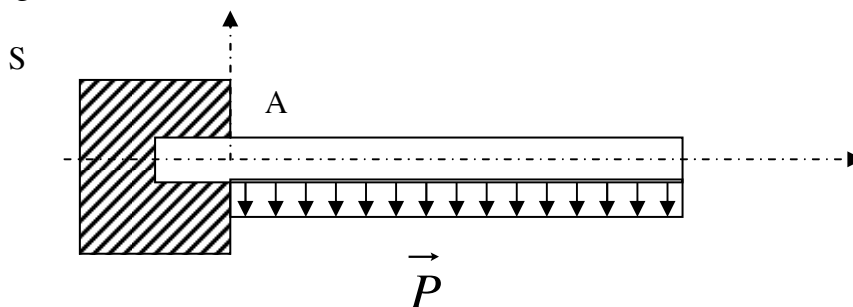
L'étude de la déformée se fait par une double intégration du moment fléchissant sur le tronçon étudié. On prendra des solutions particulières pour déterminer les constantes d'intégration.

(Dans l'exercice proposé, on observe la déformation nulle au niveau des appuis soit pour  $x = 0$  et  $x = L \Rightarrow y = 0$  et la continuité de la poutre entre les deux tronçons soit pour  $x = k \Rightarrow x'_1 = x'_2$  et  $x_1 = x_2$ ).

#### Cas particulier d'un encastrement et d'une charge répartie

La modélisation de la poutre étudiée nous conduit à faire des hypothèses sur les liaisons. Lorsque la largeur de la surface de contact est petite devant la longueur de la poutre, on associe le contact à une liaison ponctuelle (exemple d'un arbre long monté sur deux roulements à billes). Par contre, lorsque la largeur de la surface de contact est non négligeable devant la longueur de la poutre, il faut modéliser la liaison par une charge répartie. D'autre part, lorsque la poutre est en liaison encastrement à une extrémité de la poutre, la liaison ne peut pas être associée à un appui simple.

Prenons l'exemple d'une poutre de béton  $\{E\}$  dont le poids propre ne pourrait pas être négligé, encastree dans un solide  $\{S\}$ .



Le torseur de liaison de  $\{S\}$  sur la poutre  $\{E\}$  s'écrit :  $\vec{\tau}_{A(S \rightarrow E)} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{A}_{(S \rightarrow E)} \\ \vec{M}_{A(S \rightarrow E)} \end{array} \right\}$

Le calcul du torseur de cohésion se définit à partir de l'étude de statique d'un tronçon de longueur  $x$  en équilibre sous l'action des forces extérieures (en faisant varier  $x$  de 0 à  $L$ ).

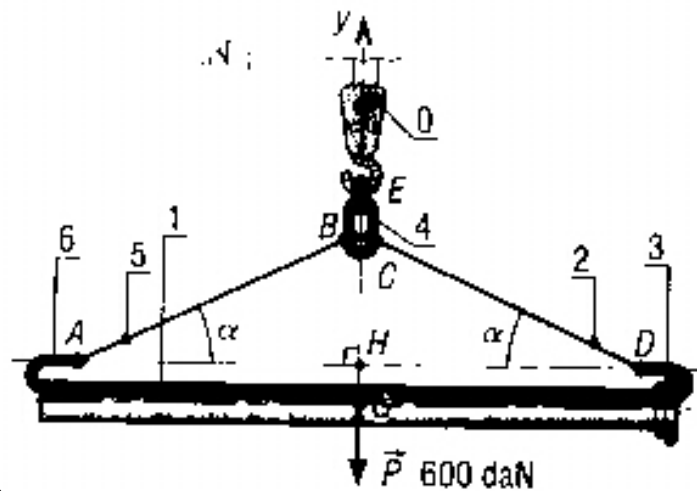
Pour  $x$  compris entre 0 et  $L$ ,  $T_{1(y)} = P x / L - P$  et  $Mf_{(z)} = M_A - P x^2 / 2L$  avec  $M_A = P L / 2$

Le moment fléchissant maximum est situé au point A où  $Mf_{(z)} = M_A = P L / 2$

## Exercice n° 7 : Elingage d'une charge

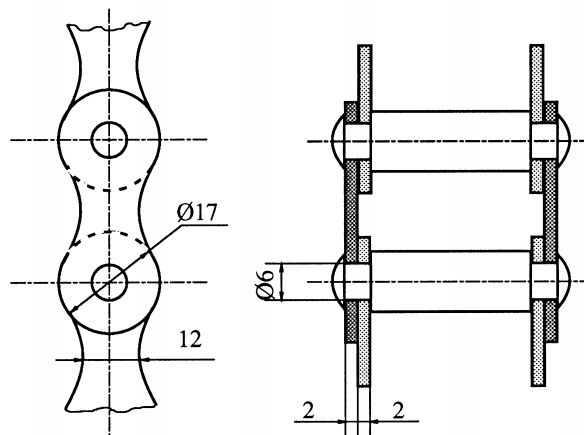
Une charge est accrochée sur un treuil par l'intermédiaire de deux crochets et deux câbles fixés à un maillon

- 1) En fonction de la longueur de la charge, préciser la variation de l'effort dans les brins du câble et la contrainte dans celui-ci.
- 2) Calculer l'allongement de ce câble



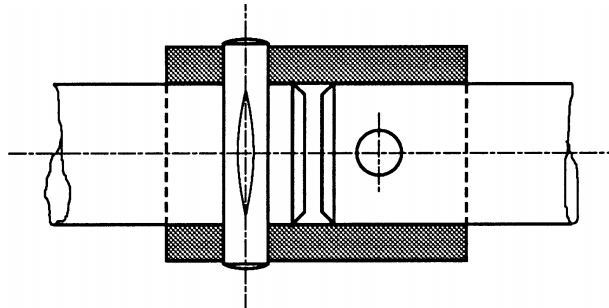
## Exercice n° 8 : Calcul d'une chaîne de transmission du mouvement

Soit une chaîne "Galle" (chaîne de vélo) composée de maillons entretoisés en acier permettant d'assurer une transmission de mouvement sans glissement. Quel est l'effort de traction maximal que peut supporter la chaîne sachant que la résistance pratique de l'acier des maillons et des axes à rouleau vaut  $R_{pe} = 200 \text{ MPa}$  et  $R_{pg} = 120 \text{ MPa}$  ?



### Exercice n° 9 : Accouplement de sécurité

Pour protéger la chaîne cinématique d'une machine tournante on utilise au niveau de la liaison des arbres (1) et (2), un dispositif de sécurité qui comprend un manchon (3) et deux goupilles (4) et (5). Le diamètre des arbres (1) et (2) est de 20 mm. On fixe la valeur maximale du couple à transmettre à 40 Nm. Les goupilles (4) et (5) ont le même diamètre  $d$  et elles sont en acier E 295 pour lequel  $R_{re} = 470$  Mpa,  $R_{ee} = 295$  Mpa,  $R_{pe} = 230$  MPa et  $R_{pg} = 115$  MPa.



- 1°) Calculer la contrainte maximale de torsion dans l'arbre de 20 mm.
- 2°) Calculer la contrainte en cisaillement sur une des goupilles.
- 3°) Calculer l'épaisseur minimum du tube pour la résistance à la pression superficielle.

### Exercice n° 10 : Arbre travaillant en torsion

Pour transmettre un couple de 400 Nm, on envisage d'utiliser soit un arbre plein, soit un arbre creux. Ces deux arbres sont constitués du même acier pour lequel  $R_{pg} = 240$  MPa et  $G = 80000$  MPa.

L'arbre plein a un diamètre  $d$ . L'arbre creux a pour diamètre  $D$  et  $d_1$  tels que  $d_1 = 0,9 D$ .

Déterminer le diamètre  $d$  de l'arbre plein et la déformation angulaire entre deux sections distantes de 300 mm.

Déterminer les diamètres  $D$  et  $d_1$  de l'arbre creux et la déformation angulaire entre deux sections distantes de 300 mm. Comparer.

Déterminer le rapport  $\lambda$  des masses des deux arbres. Conclusion.

# LA DYNAMIQUE

## 1. LA CINÉTIQUE

La cinétique se construit à partir de la cinématique en introduisant la notion de masse. En mécanique classique, il est admis le principe de conservation de la masse c'est à dire qu'un ensemble matériel  $\{E\}$  a une masse constante  $m$  au cours du temps.

### Définition du torseur cinétique

Soit un ensemble matériel  $\{E\}$  de masse  $m$ , de centre d'inertie  $G$ , en mouvement dans un référentiel  $R(O,x,y,z)$ . Le torseur cinétique de l'ensemble matériel  $\{E\}$  en un point  $A$  quelconque s'écrit :

$$\mathcal{C}_A^{(E/R)} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{P \in E} \vec{v}_{(P/R)} \cdot dm \\ \int_{P \in E} \vec{AP} \wedge \vec{v}_{(P/R)} \cdot dm \end{array} \right\}_{Axyz} = \left\{ \begin{array}{l} m \cdot \vec{v}_{(G/R)} \\ \vec{\sigma}_{A(E/R)} \end{array} \right\}_{Axyz}$$

La position du centre d'inertie  $G$  est donnée par :  $m \cdot \vec{OG} = \int_{P \in E} \vec{OP} \cdot dm$

En dérivant les deux membres de cette égalité, on trouve l'équation de la résultante cinétique :

$$m \cdot \vec{v}_{(G/R)} = \int_{P \in E} \vec{v}_{(P/R)} \cdot dm$$

Comme tout torseur, le moment cinétique peut s'écrire en tout point de l'espace tel que :

$$\vec{\sigma}_{B(E/R)} = \vec{\sigma}_{A(E/R)} + \left( \int_{P \in E} \vec{v}_{(P/R)} \cdot dm \right) \wedge \vec{AB} = \vec{\sigma}_{A(E/R)} + m \cdot \vec{v}_{(G/R)} \wedge \vec{AB}$$

## 2. LA DYNAMIQUE

### Définition du torseur dynamique

Soit un ensemble matériel  $\{E\}$  de masse  $m$ , de centre d'inertie  $G$ , en mouvement dans un référentiel  $R(O,x,y,z)$ . Le torseur dynamique de l'ensemble matériel  $\{E\}$  en un point  $A$  quelconque s'écrit :

$$\mathcal{D}_A^{(E/R)} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{P \in E} \vec{a}_{(P/R)} \cdot dm \\ \int_{P \in E} \vec{AP} \wedge \vec{a}_{(P/R)} \cdot dm \end{array} \right\}_{Axyz} = \left\{ \begin{array}{l} m \cdot \vec{a}_{(G/R)} \\ \vec{\delta}_{A(E/R)} \end{array} \right\}_{Axyz}$$

La position du centre d'inertie G est donnée par :  $m \cdot \overrightarrow{OG} = \int_{P \in E} \overrightarrow{OP} \cdot dm$

En dérivant les deux membres de cette égalité, on trouve l'équation de la résultante dynamique :

$$m \cdot \vec{a}_{(G/R)} = \int_{P \in E} \vec{a}_{(P/R)} \cdot dm$$

La résultante est le produit de la masse du solide par le vecteur accélération du centre d'inertie du solide. Elle s'exprime en N. Comme tout torseur, le moment dynamique s'exprime en N m et varie d'un point à l'autre du solide selon :

$$\vec{\delta}_{B(E/R)} = \vec{\delta}_{A(E/R)} + \left( \int_{P \in E} \vec{a}_{(P/R)} \cdot dm \right) \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{\delta}_{A(E/R)} + m \cdot \vec{a}_{(G/R)} \wedge \overrightarrow{AB}$$

### 3. RELATION ENTRE LES MOMENTS CINETIQUE ET DYNAMIQUE

$$\vec{\delta}_{A(E/R)} = \left( \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{A(E/R)} \right)_R + m \cdot \vec{v}_{(A/R)} \wedge \vec{v}_{(G/R)}$$

Cas particuliers :

Si A est fixe dans R alors :

$$\vec{\delta}_{A(E/R)} = \left( \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{A(E/R)} \right)_R$$

Si A est confondu avec G alors :

$$\vec{\delta}_{G(E/R)} = \left( \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{G(E/R)} \right)_R$$

### 4. OPERATEUR D'INERTIE

L'opérateur d'inertie d'un solide {S} en un point O, pour un vecteur  $\vec{u}$  est égal à :

$$\vec{I}_O(S, \vec{u}) = \int_{P \in S} \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}) \cdot dm$$

Cet opérateur est linéaire et donc représentable par une matrice. Elle s'obtient en disposant en colonnes, les composantes des vecteurs transformés des vecteurs de base par l'opérateur d'inertie. Pour simplifier l'écriture, la matrice d'inertie s'écrit :



$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad A = I_{xx} = \int_S (y^2 + z^2) dm$$

$$B = I_{yy} = \int_S (x^2 + z^2) dm \quad C = I_{zz} = \int_S (x^2 + y^2) dm$$

$$D = -I_{yz} = \int_S (yz) dm \quad E = -I_{xz} = \int_S (xz) dm \quad F = -I_{xy} = \int_S (xy) dm$$

L'opérateur d'inertie étant symétrique, possède un système de trois vecteurs propres orthogonaux dans lequel, la matrice d'inertie est diagonale.

$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

Les moments d'inertie  $A_1, B_1, C_1$ , sont appelés moments principaux d'inertie du solide  $S$  au point  $O$ . Le repère est appelé repère principal d'inertie.

## 5. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

Le principe fondamental de la dynamique est la base de la mécanique classique et fut énoncé pour la première fois par Newton (fin du XVII). Dans sa forme très générale, le principe fondamental de la dynamique pour un solide  $S$  s'écrit :

$$\mathcal{D}_{A (E/R)} = \left\{ \mathcal{T}(ext \rightarrow E) \right\}_{Axyz}$$

Les deux torseurs doivent être exprimés au même point et les calculs doivent être faits dans un repère galiléen.

Un solide est en équilibre statique si son torseur dynamique est nul, c'est à dire si :

$$\left\{ \Gamma_{\text{extérieur} \rightarrow \text{solide}} \right\} = \{0\}$$

L'équilibre statique ne signifie pas que le solide soit immobile.

## 5. PUISSANCE DEVELOPPEE PAR LES ACTIONS STATIQUES

La puissance développée par les actions statiques qui s'exercent sur un solide est le comoment du torseur statique et du torseur cinématique :

$$P = \{T_S \cdot V_S\} = \vec{F} \cdot \vec{v}_A + \vec{M}_A \cdot \vec{\Omega} = X v_{Ax} + Y v_{Ay} + Z v_{Az} + L_A \omega_x + M_A \omega_y + N_A \omega_z$$

= puissance en translation + puissance en rotation

Le résultat final est indépendant du point A choisi pour faire les calculs. P est un scalaire qui s'exprime en W.

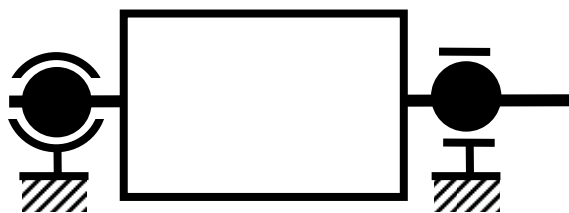
Le travail élémentaire développé par les actions statiques qui s'exercent sur un solide pendant un déplacement infinitésimal est le comoment du torseur statique et du torseur des petits déplacements :

$$dW = \{T_S \cdot dU_S\} = \vec{F} \cdot d\vec{u}_A + \vec{M}_A \cdot d\vec{w}$$

= travail en translation + travail en rotation

## Exercice n° 11 : Rotor d'un moteur électrique

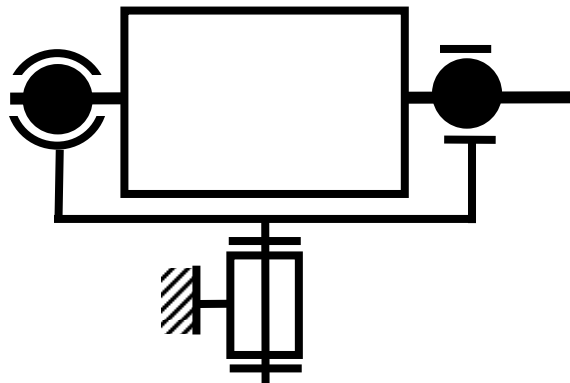
Un moteur électrique est composé d'un rotor monté sur un arbre et d'un stator liés par une liaison pivot réalisée par deux paliers A et B. Du fait de défauts inévitables apparaissant lors de la fabrication des pièces ou lors du montage, le centre de gravité du rotor n'est pas exactement sur l'axe de rotation. Ceci génère des efforts supplémentaires sur les paliers A et B qui se traduiront par des vibrations, du bruit et des risques d'usure prématurée des roulements à billes constituant les paliers. La distance entre le centre de gravité G du rotor et l'axe de rotation est  $e = 10 \mu\text{m}$ . Le rotor a un diamètre de 100 mm et une longueur de 150 mm avec une masse volumique de  $7800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Sa vitesse nominale de rotation est  $N = 3000 \text{ tr}\cdot\text{min}^{-1}$ . L'écartement entre les deux paliers est de 200 mm.



- 1) Dans un premier temps, on mesure la décélération de ce moteur qui s'arrête en 32 secondes. Calculer la décélération et le nombre de tour pour stopper ce moteur et sa charge (méthode inertielle)
- 2) Calculer les efforts des paliers sur l'arbre en A et B, à l'arrêt.
- 3) Calculer le moment d'inertie, le moment cinétique et le moment dynamique de ce rotor en négligeant l'axe.

4) Calculer les efforts des paliers sur l'arbre en A et B, en régime nominal.

3) On dispose dans un deuxième temps, ce rotor sur un axe de pivotement passant par le milieu de ce rotor. Si la vitesse de rotation sur cet axe de rotation est de 4 rad/s, définir les efforts sur les paliers A et B



## Exercice n° 12 : Démarrage d'un moteur électrique

Un moteur électrique de couple moteur constant  $C_M = 15 \text{ N.m}$  et de moment d'inertie  $J_M = 0,05 \text{ kg.m}^2$  entraîne un système mélangeur de moment d'inertie  $J_1 = 0,20 \text{ kg.m}^2$ . L'ensemble est soumis à un couple résistant qui dépend de la vitesse :  $C_R = A \omega$  avec  $A = 0,05 \text{ S.I.}$ .

- 1) Tracez sur un même graphe  $C_M$  et  $C_R$  en fonction de la vitesse de rotation. Que constatez-vous ?
- 2) En appliquant le principe fondamental de la dynamique des solides en rotation, donner l'équation différentielle de la vitesse de rotation  $\omega(t)$
- 3) En définissant les conditions initiales au démarrage, établir l'expression de cette vitesse.
- 4) Quelle est la vitesse finale du système ? De quoi dépend-elle ? Au bout de combien de temps le moteur atteint-il 99% de sa vitesse finale ? De quoi dépend ce temps ?
- 5) En définissant des conditions initiales avant la phase d'arrêt, établir l'expression de la vitesse de rotation. Qu'en pensez-vous ? (Couple de frottement sec)

## Chapitre 7

# LA MECANIQUE VIBRATOIRE

## 1. INTRODUCTION

La modélisation d'un mécanisme ou d'un système a pour but de décrire mathématiquement son comportement dynamique. Tout modèle est une représentation imparfaite de la réalité. Il est d'autant plus compliqué qu'on veut cerner celle-ci au plus près. Toutefois, l'ingénieur est naturellement conduit à faire des simplifications en négligeant certains effets.

Considérons un arbre de section  $A$  et de moment d'inertie  $I$  constants, de matériau homogène de masse volumique  $\rho$ , montée sur deux roulements à chaque extrémité. Les vibrations de flexion en régime libre non amorti obéissent à l'équation de d'Alembert :

$$\frac{EI}{\rho A} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Sa solution est un mouvement vibratoire correspondant à une onde stationnaire avec des modes et des fréquences propres qui dépendent des conditions aux limites. Les pulsations propres sont données par l'expression suivante :

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{m \ell^3}}$$

où  $n$  est l'ordre des modes propres vibratoires de la poutre. La déformée dépend bien sûr du mode sans être affectée par l'amortissement interne du matériau.

Les structures et les pièces des machines sont souvent plus compliquées qu'une poutre continue et ne permettent pas pratiquement de les calculer. La méthode la plus aisée consiste à les décomposer en une série de masses discrètes reliées par des ressorts.

Un oscillateur élémentaire se compose toujours des éléments suivants :

- une inertie  $I$  capable de stocker de l'énergie cinétique ;
- un ressort  $R$  stockant de l'énergie potentielle ;
- un élément  $D$  dissipateur d'énergie communément appelé amortisseur ;
- un excitateur apportant de l'énergie ; l'oscillateur est excité soit par un effort variable  $Q(t)$  appliqué à l'inertie soit par un mouvement imposé au système.

## 2. FORMULATION

La système solide-ressort-amortisseur est le système de base pour décrire un phénomène vibratoire. Il permet une réflexion sur les notions de pulsation propre complexe, d'instabilité en régimes libres, de résonance, de transmission des forces et de déplacement en régimes forcés. Ce système est représenté sur la figure suivante. La position de base est définie par  $x_B(t)$  et  $x_M(t)$  définit la position du barycentre massique du solide. Une force  $f(t)$  peut être appliquée au solide. Les fréquences propres du solide, du ressort, de l'amortisseur sont grandes par rapport à la fréquence maximale d'intérêt spécifique au problème physique étudié.

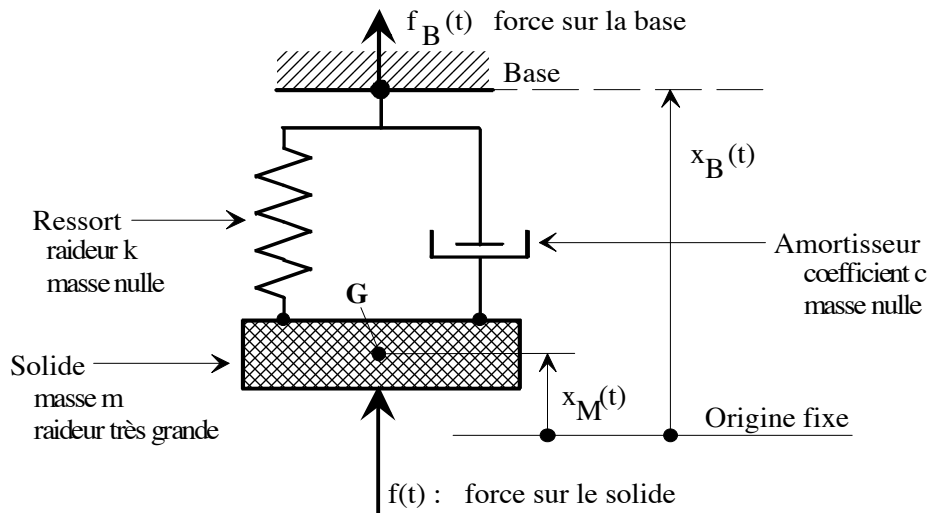


Figure : Système solide-ressort-amortisseur ; G : barycentre massique, t : temps

Le principe de d'Alembert permet de former les équations du mouvement du solide :

$$m \frac{d^2 x_M}{dt^2} + c \frac{dx_M}{dt} + kx_M = kx_B + c \frac{dx_B}{dt} + f(t)$$

$$f_B(t) = k(x_M - x_B) + c \left( \frac{dx_M}{dt} - \frac{dx_B}{dt} \right)$$

avec, dans le champ de la pesanteur :

$$x_M = x_{M_0} + x \quad ; \quad x_B = x_{B_0} + x_b \quad ; \quad x_{M_0} = x_M^0 - \frac{mg}{k}$$

$x_M^0$  : position du solide sans pesanteur ;  $mg/k$  déviation (flèche) statique

$x_{M_0}$  : position du solide autour de laquelle il évolue,

$x_{B_0}$  : position de la base autour de laquelle elle évolue.

Lorsque la base est mobile, le système possède deux degrés de liberté ; un seul lorsque la position de la base est fixe ou imposée.

### 3 – MOUVEMENT LIBRE

Ils résultent de l'application transitoire :

– soit d'un déplacement  $x_b(t)$  imposé à la base

– soit d'une force  $f(t)$  appliquée au solide

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$kx + c \frac{dx}{dt} = f_b(t)$$

Cherchons une solution de la forme :  $x = X \exp pt$

$$(mp^2 + cp + k)X \exp pt = 0$$

D'où :

$$mp^2 + cp + k = 0$$

C'est l'équation aux pulsations propres dites aussi naturelles, qui a pour solutions :

$$p_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \text{ soit : } p_2 = \overline{p_1}$$

$$\frac{k}{m} > \left(\frac{c}{2m}\right)^2, \text{ donc } p_{1,2} = \delta_1 \pm j\omega_1; j^2 = -1$$

$p_{1,2}$  : pulsations propres complexes ;

$\delta_1$  : coefficient d'amortissement ;  $\omega_1$  : pulsation propre amortie.

Les pulsations propres peuvent s'exprimer par une forme condensée :

$$p_{1,2} = (-\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2})\omega_0 \quad \text{avec} \quad \delta_1 = -\xi\omega_0 \quad \text{et} \quad \omega_1 = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} : \text{ pulsation propre du système conservatif associé (sans amortissement)}$$

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} : \text{ facteur d'amortissement}$$

La solution générale s'écrit :

$$x(t) = X_1 \exp p_1 t + X_2 \exp p_2 t$$

$$x(t) = \exp \delta_1 t [(X_1 + X_2) \cos \omega_1 t + j(X_1 - X_2) \sin \omega_1 t]$$

$X_1$  et  $X_2$  sont définis par les conditions initiales à  $t = 0$ . Par exemple :

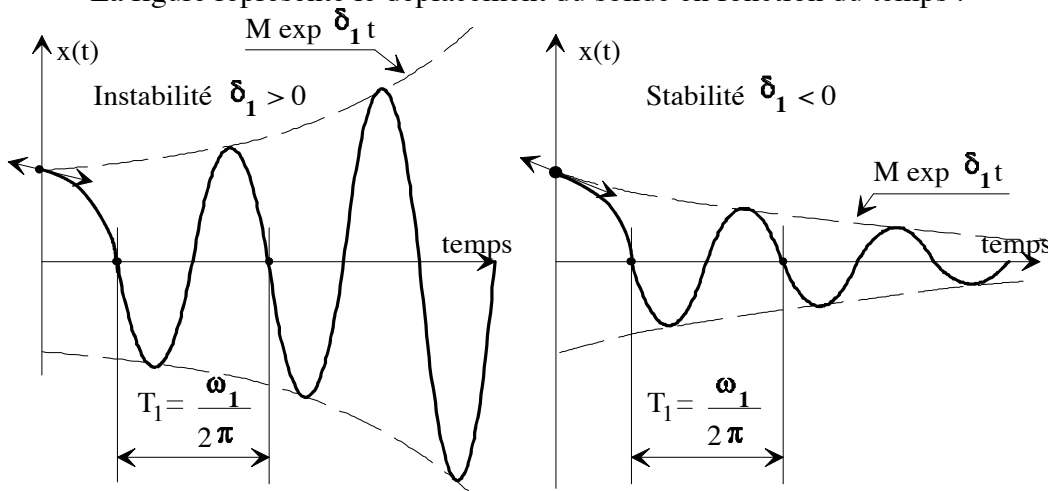
$$x(0) = X_0 \quad \text{donc} \quad X_1 + X_2 = X_0$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = 0 \quad \text{donc} \quad \delta_1(X_1 + X_2) + j\omega_1(X_1 - X_2) = 0 \Rightarrow X_1 - X_2 = -\frac{X_0\delta_1}{j\omega_1}$$

et par suite : 
$$x(t) = X_0 \exp \delta_1 t \left( \cos \omega_1 t - \frac{\delta_1}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right)$$

soit : 
$$x(t) = M \exp \delta_1 t \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \text{ avec } \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\delta_1}{\omega_1} \text{ et } M = X_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\delta_1}{\omega_1}\right)^2}$$

La figure représente le déplacement du solide en fonction du temps :



Figures : Régimes libres : instabilité - stabilité

## 4 – MOUVEMENT PERMANENT FORCES

### 4.1 Force imposée au solide - Base immobile

#### *Force harmonique d'amplitude constante*

$$f(t) = F \sin \omega t = \Re[-jF \exp j\omega t]$$

$$x_b = 0$$

Cherchons une solution de la forme :  $x(t) = \Re[X \exp j\omega t]$  de même pulsation  $\omega$  que la force excitatrice. Les facteurs de transmission en régime harmonique entre la force F et :

- le déplacement :

$$T_d: \quad \frac{x(t)}{F/k} = \frac{\sin(\omega t - \theta)}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}} = T_d \sin(\omega t - \theta)$$

$$\text{avec } \operatorname{tg}\theta = \frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2} \quad ; \quad \lambda = \frac{\omega}{\omega_0} \quad : \text{ pulsation réduite}$$

- la vitesse :

$$T_v: \quad \frac{dx/dt}{F/k} = T_v \cos(\omega t - \theta) \text{ avec } T_v = \lambda T_d$$

- l'accélération :

$$T_a: \quad \frac{d^2x/dt^2}{F/m} = -T_a \sin(\omega t - \theta) \quad \text{avec } T_a = \lambda^2 T_d$$

- la force sur la base

$$T_f: \quad \frac{f_b(t)}{F} = \frac{\sqrt{1+(2\xi\lambda)^2}}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}} \sin(\omega t - \psi) = T_f \sin(\omega t - \psi)$$

$$\text{avec : } \operatorname{tg}\psi = \frac{2\xi\lambda^3}{1-\lambda^2 + (2\xi\lambda)^2}$$

Quel que soit le facteur d'amortissement  $\xi$ ,  $T_v$  est maximum pour  $\lambda = \omega/\omega_0 = 1$  ; l'amplitude de la vitesse est alors égale à  $F/c$ .

#### *Force tournante de balourd*

La force appliquée résulte d'un balourd sur un rotor tournant à la vitesse de rotation  $\Omega$  :

$$f(t) = b\Omega^2 \sin \Omega t = b\omega_0^2 \lambda^2 \sin \Omega t$$

Les facteurs de transmission sont déterminés en substituant  $\Omega$  à  $\omega$  et  $b\omega_0^2 \lambda^2$  à F.

Les résonances (maxima de  $F_b$ ) se manifestent entre les maxima des facteurs de transmission T et  $\lambda = 1$ .

Pour  $\lambda > 1$  la force transmise  $F_b$  est toujours supérieure à  $b\omega_0^2$ . Pour  $\lambda > \sqrt{2}$ , l'amplitude de la force transmise augmente avec le facteur d'amortissement  $\xi$ .

### 4.2 Déplacement ou accélération imposés à la base

#### *Déplacement imposé*

Le déplacement imposé s'exprime par :

$$x_b(t) = X_b \sin \omega_b t \quad \text{et} \quad f(t) = 0$$

Les équations permettent la détermination du facteur de transmission  $T$  entre les déplacements de la base et du solide :

$$x(t)/X_b = T \sin(\omega_b t - \psi)$$

$T$  est identique au facteur  $T_f$ .

**Accélération imposée**

L'accélération imposée s'exprime par :

$$\frac{d^2 x_b}{dt^2} = \Gamma_b \sin \omega_b t$$

– du déplacement du solide / base :  $z(t) = x(t) - x_b(t) = Z_r \sin(\omega_b t - \varphi_z)$

– de la vitesse relative  $\frac{dz}{dt} = V_r \sin(\omega_b t - \varphi_v)$  du solide par rapport à la base :

$$\frac{\omega_0^2 Z_r}{\Gamma_b} = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}} \text{ avec } \left( \frac{\omega_0^2 Z_r}{\Gamma_b} \right)_{\max} = \frac{Q_{3dB}}{\sqrt{1-\xi^2}} \text{ soit } \left( \frac{V_r}{\Gamma_b} \right)_{\max} = Q_{3dB}$$

Ces relations donnent une signification physique au facteur d'amplification  $Q_{3dB}$

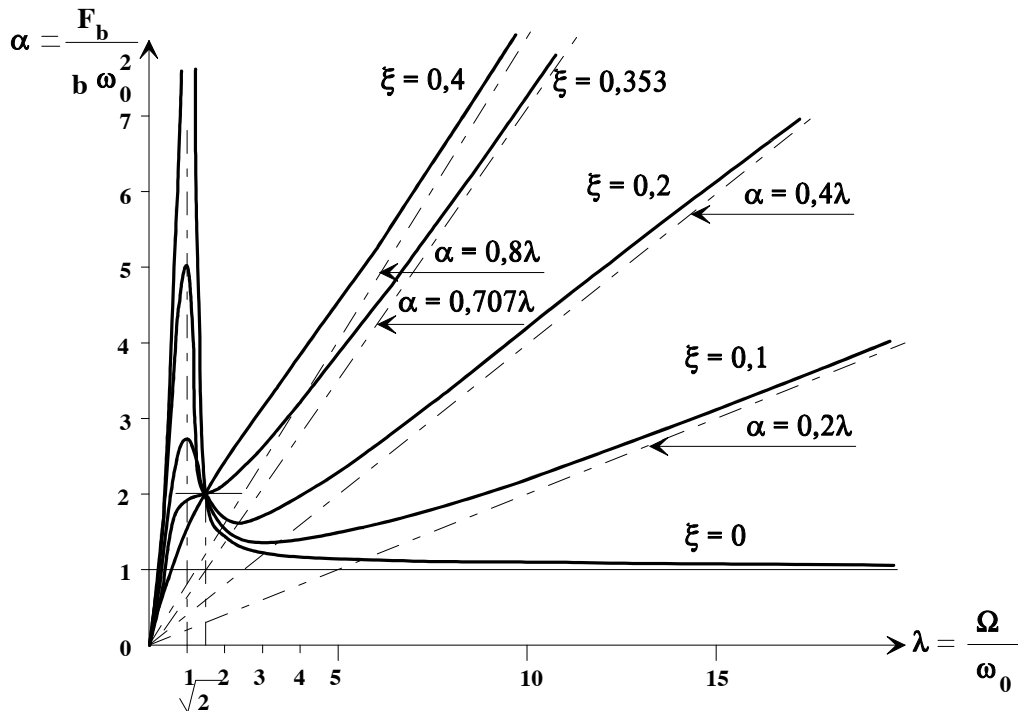


Figure : Force transmise à la base d'un système solide-ressort-amortisseur sous l'action d'une force de balourd

$$f(t) = b\Omega^2 \sin \Omega t = b\omega_0^2 \lambda^2 \sin \Omega t \Rightarrow f_b(t) = F_b \sin(\Omega t - \psi)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

$$\alpha = \frac{F_b}{b\omega_0^2}$$

$$\lambda = \frac{\Omega}{\omega_0}$$



5 - COMPLEMENTS  
5.1 Autres systèmes

D'autres systèmes peuvent être décrits par un modèle identique à celui du système solide-ressort- amortisseur :

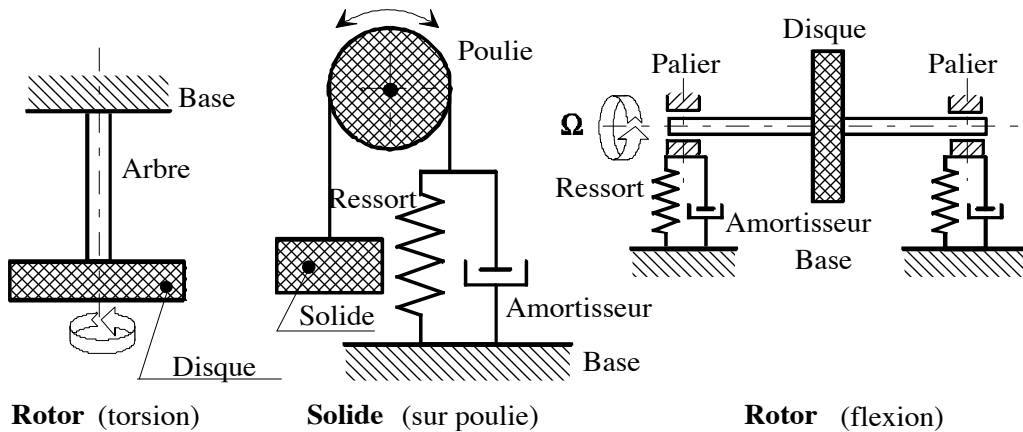
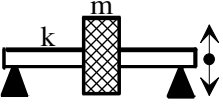
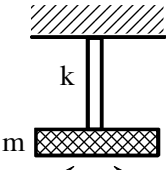


Figure: Systèmes solide-ressort-amortisseur

- les masses généralisées ont été calculées par une méthode énergétique, dite de Rayleigh, qui permet de tenir compte de la masse de l'élément élastique ;
- les raideurs sont déterminées avec les règles classiques de la résistance des matériaux. Les raideurs et les masses généralisées, sont utilisables dans les équations du mouvement.

Tableau Systèmes conservatifs Raideurs et masses généralisées		
Système	Raideur k	Masse généralisée
<p>Translation</p>	$\frac{Gd^4}{8nD^3}$ <p>D : diamètre moyen du ressort d : diamètre du fil n : nombre de spires G : module de cisaillement (ressort hélicoïdal)</p>	$m + \frac{m_r}{3}$ <p><math>m_r</math> : masse ressort</p>
<p>Torsion</p>	$\frac{G\pi D^4}{32 l}$ <p>D : diamètre de l'arbre l : longueur de l'arbre G : module de cisaillement</p>	$I + \frac{I_a}{3}$ <p><math>I_a</math> : inertie massique de l'arbre</p>

 <p>Appuis rigides à rotules Flexion</p>	$\frac{48EI}{l^3}$ <p>I : inertie élastique de l'arbre l : longueur de l'arbre E : module d'Young</p>	$m + \frac{m_a}{4}$ <p><math>m_a</math> : masse de l'arbre</p>
 <p>Flexion</p>	$\frac{3EI}{l^3}$ <p>I : inertie élastique de la poutre l : longueur de la poutre E : module d'Young</p>	$m + 0,23m_p$ <p><math>m_p</math> : masse de la poutre</p>

## 5.2 Amortissement des structures

### Coefficient d'amortissement équivalent

Le modèle d'un amortissement visqueux est simple ; son expression par le coefficient  $c$  permet des solutions mathématiques simples. La réalité construite ou naturelle est souvent plus complexe.

Il est possible de définir un coefficient d'amortissement équivalent  $C_e$  tel que pendant la période  $T$  d'un régime harmonique  $x = X\sin\omega t$ , l'énergie  $E$  dissipée soit égale à l'énergie d'une force de frottement  $f_e$  :

$$E = \int_0^T C_e \frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt} dt = \int_0^T f_e \frac{dx}{dt} dt T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$C_e X^2 \omega \pi = E \Rightarrow C_e = \frac{E}{\omega \pi X^2}$$

### Force de frottement d'amplitude proportionnelle au déplacement

Soit une force de frottement proportionnelle au déplacement et déphasée de  $\pi/2$

$$f_e = \beta X \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

L'énergie  $E$  dépensée par cycle s'écrit :

$$E = \int_0^T \beta X \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \omega X \cos \omega t dt = \beta X^2 \pi$$

$$C_e = \frac{\beta X^2 \pi}{\omega \pi X^2} \Rightarrow C_e = \frac{\beta}{\omega}$$

La force de frottement en régime harmonique s'écrit :

$$C_e \frac{dx}{dt} = C_e j \omega x = j \beta x$$

La force de frottement peut être ajoutée à la force élastique de rappel :

$$kx + C_e \frac{dx}{dt} = (k + j\beta)x = k\left(1 + j\frac{\beta}{k}\right)x$$

Le rapport  $\beta/k$  est dit facteur d'amortissement structural ou amortissement hystérétique, spécifique de l'amortissement interne des matériaux.

$(k + j\beta)$  est dite *raideur complexe*.

### 5.3 Stabilité et facteur d'amplification

Les mouvements libres peuvent être caractérisés par le décrément logarithmique :

$$\Lambda_1 = - \frac{2\pi\delta_1}{\omega_1}$$

Il permet de définir le rapport des amplitudes du mouvement libre, espacées de la pseudo-période  $T_1 = 2\pi/\omega_1$  :

$$\frac{x(t + T_1)}{x(t)} = \exp \Lambda_1$$

La résonance, repérée par le maximum de la réponse du système en régime forcé, est caractérisée par sa pulsation  $\omega_R$ . La résonance permet de définir le facteur d'amplification  $Q_{3dB}$  ; le repère "3 dB" résulte de :

$$20 \lg \frac{|X|_{\max}}{\frac{|X|_{\max}}{\sqrt{2}}} = 3 \text{ dB}$$

Pour  $\xi$  petit, il est aisé de montrer que :

$$Q_{3dB} = \frac{\omega_R}{\Delta\omega_R} \approx \frac{1}{2\xi} \qquad \Lambda_1 \approx \frac{\pi}{Q_{3dB}}$$

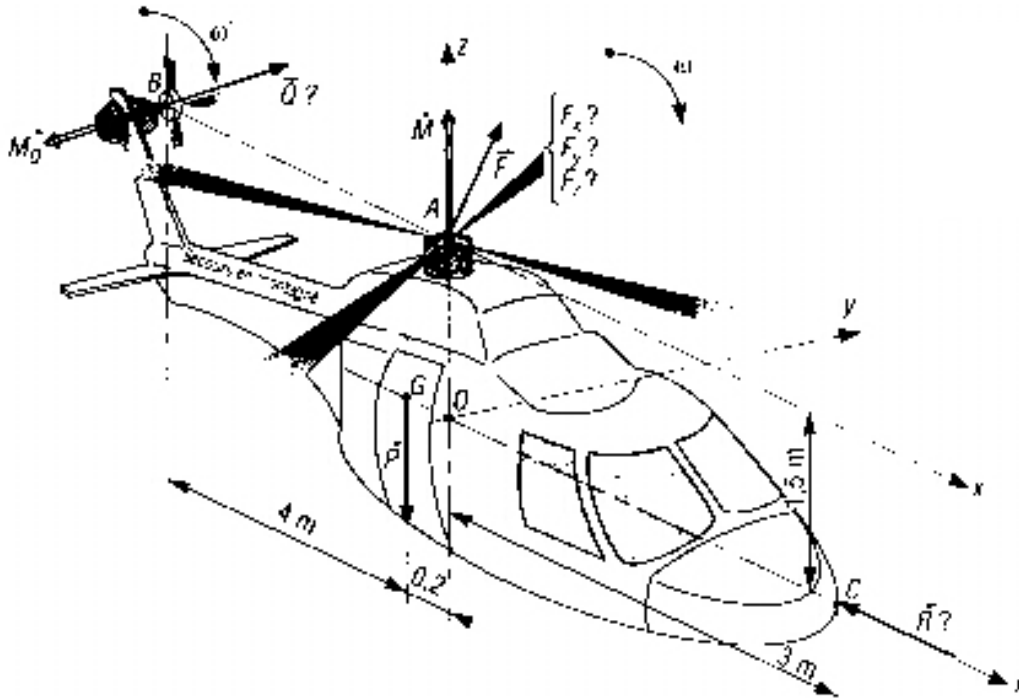
<b>Tableau</b> Qualité de la stabilité		
$\Lambda_1$	$Q_{3dB}$	Qualité
$\Lambda_1 \leq 0$		Instabilité
$0 < \Lambda_1 \leq 0,63$	$\infty > Q_{3dB} \geq 5$	Médiane
$0,63 < \Lambda_1 \leq 1$	$5 > Q_{3dB} \geq 3$	Acceptable
$\Lambda_1 > 1$	$Q_{3dB} < 3$	Excellente

Le facteur d'amplification peut être défini par le module de la vitesse ou par celui de l'accélération ; les facteurs d'amplification sont proches pour  $\xi$  petit.

Chapitre 8

**TRAVAUX DIRIGES**

**TD n° 1 : Actions mécaniques sur un hélicoptère en vol**



Un hélicoptère se trouve en équilibre sous l'action de ces deux rotors, le rotor principal qui produit un moment en A noté  $M_A$  de 420 N.m que l'on considérera uniquement sur l'axe Z et une force F qui maintient en l'air cet appareil. Le rotor secondaire ou rotor de queue en fonction de son sens de rotation, crée une action Q inconnue suivant Y et un moment  $M_Q$  négatif sur Y de 30 N.m. Le poids de l'appareil est de 30 kN et l'action de l'air sur l'appareil appliquée sur le nez de l'appareil permet d'étudier cet hélicoptère en vol sur place par vent violent ou en vol réel à vitesse constante avec une résistance à l'avancement appliquée au point C. Cette étude reste donc une étude en statique.

Les données numériques sont les suivantes:

- $h = 1,5 \text{ m} = OA$
- $2h = 3 \text{ m} = OC$
- $k = 0,2 \text{ m} = OG$
- $l = 4,2 \text{ m} = AB$

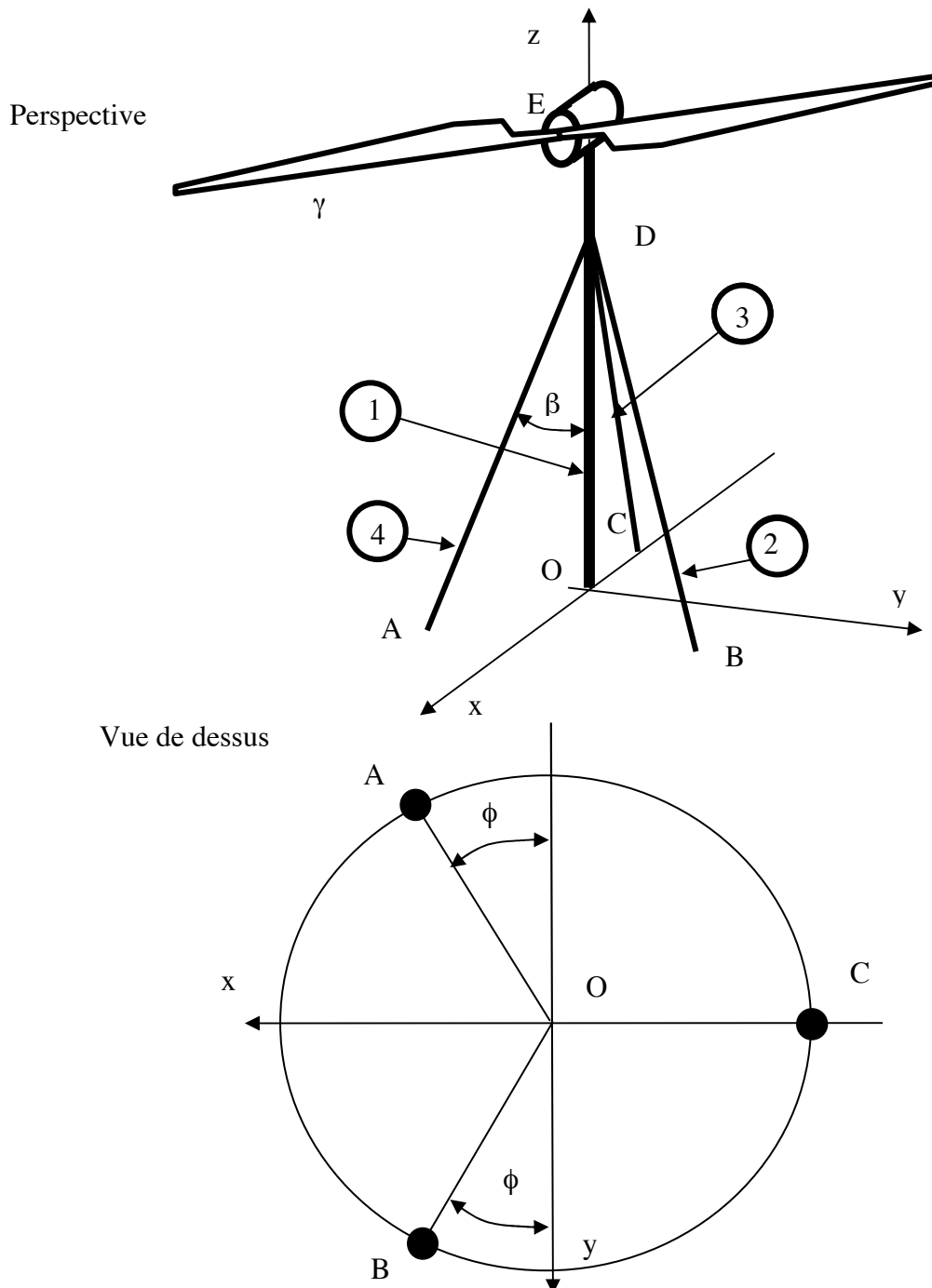
Ecrire les torseurs des actions extérieures sur cet hélicoptère

Appliquer le principe fondamental de la statique en ayant remplacé tous les torseurs au point A

Déterminer les composantes de l'action F du rotor principal de cet hélicoptère

Qu'en pensez-vous ?

## TD n° 2 : Etude des actions mécaniques sur une éolienne haubanée



Le schéma représente une éolienne à axe horizontal, dont le mat ① est en appui sur le sol par l'intermédiaire d'une liaison rotule et fixé par trois haubans (câbles d'acier tendus pour assurer la stabilité de l'ensemble) repérés par ②, ③ et ④. Les masses du mat et des haubans sont négligées. Les 3 points de fixation au sol des haubans repérés par les point ABC sont sur

un cercle de rayon  $R$  et répartis à  $120^\circ$  en précisant que le point  $C$  se trouve sur l'axe  $x$ . L'angle  $\phi$  est donc de  $30^\circ$  (pour simplifier les calculs mais la direction du vent étant variable, la symétrie ne sera pas toujours respectée. Ces points de fixations sont des blocs massifs de béton assurant la stabilité de l'ensemble.

Les haubans sont fixés sur le mat au point  $D$  tel que l'angle entre le câble du hauban et le mat de l'éolienne forme un angle  $\beta$ .

Au point  $E$ , en haut du mat, est montée l'éolienne composée d'une machine électrique, d'un multiplicateur de vitesse et de la fixation des pales sur le rotor. Un système d'orientation des pales permet de limiter la vitesse de rotation du rotor afin que la vitesse en extrémité de pale ne dépasse pas la vitesse du son. Un frein équipe aussi le système.

Avant le montage de l'éolienne, une précontrainte dans les câbles des haubans est effectuée par une tension avec des ridoirs que nous noterons  $F_0$ .

La masse de l'éolienne s'applique au point  $E$  de même que l'action du vent sur l'éolienne que nous noterons  $Q$  suivant une direction négative sur  $x$ .

Dans les grosses éoliennes (jusqu'à 5 MW et 118 m de diamètre), un système mécanique permet d'orienter l'éolienne à partir d'un calculateur sans suivre le vent réel, afin de réduire les effets gyroscopiques.

La liaison rotule au point  $O$  précise que le système peut supporter des composantes de la force suivant les 3 directions  $x, y, z$ .

- 1) Si la longueur d'une pale est de 6 m, définir la fréquence de rotation maximale pour ne pas dépasser 95% de la vitesse du son en extrémité de pale.
- 2) Définir les équations des actions mécaniques au point  $O, A, B, C$
- 3) Faites les applications numériques pour une longueur  $OD = 8 \text{ m} = h$ ,  $DE = 4 \text{ m} = \ell$  et un angle  $\beta$  de  $20^\circ$ .

La masse de l'éolienne est de 80 kg et les actions de précontraintes  $F_0$  sont de 5000 N.

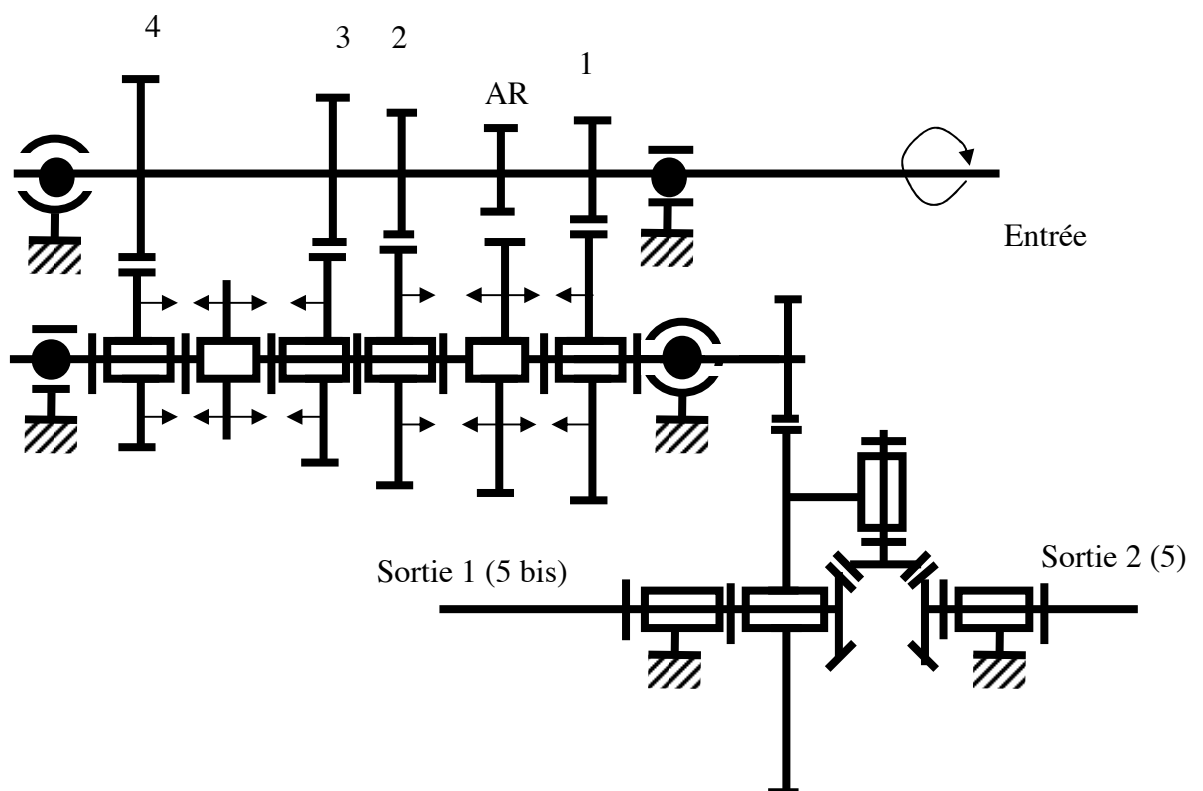
Nous prendrons pour commencer une force  $Q$  de 500 N

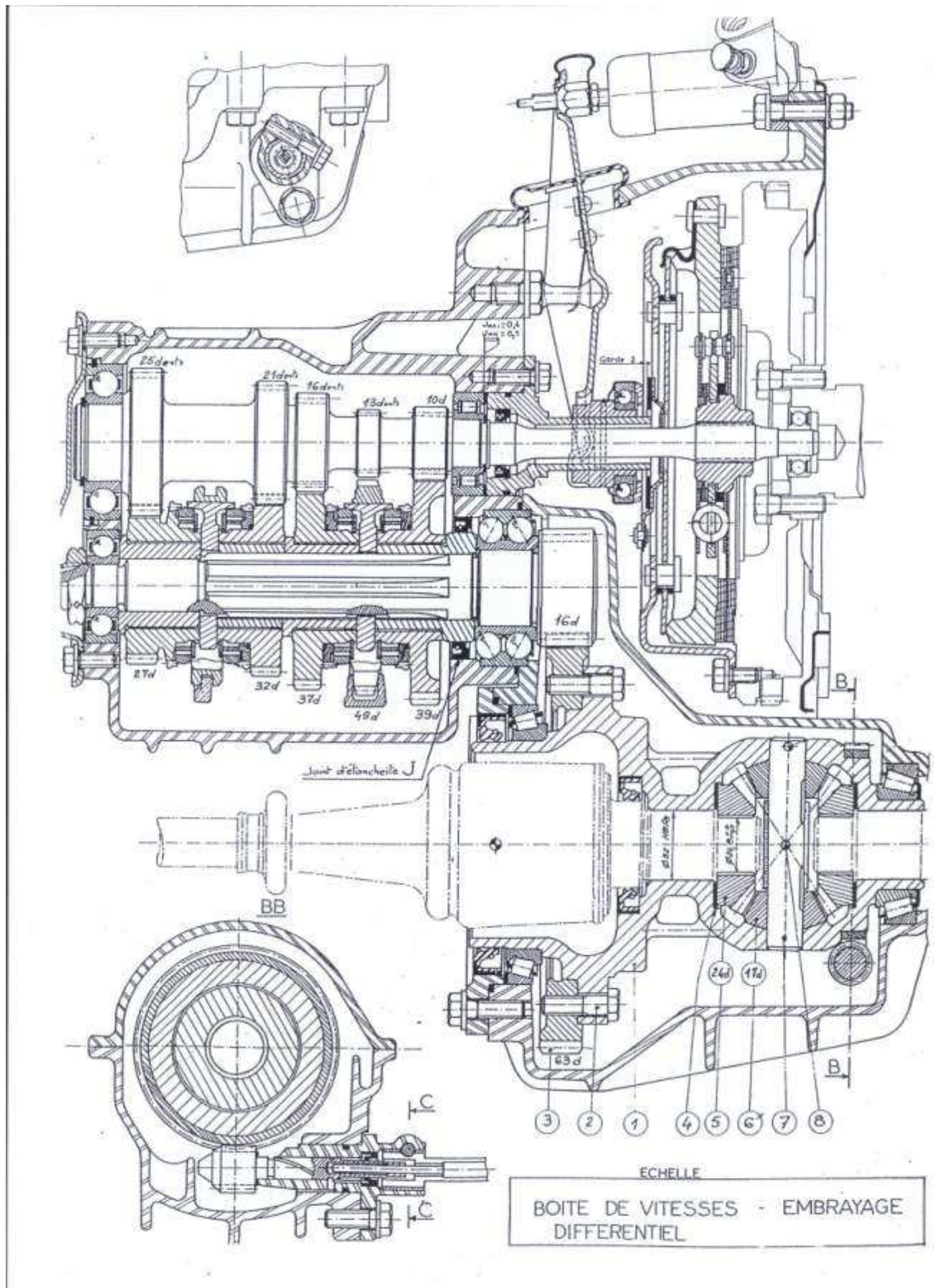
- 4) Définir la force maximale du vent  $Q$  pour que le câble  $DC$  soit encore tendu.
- 5) Que ce passe-t-il si la force du vent dépasse la valeur calculé précédemment.

## TD n° 3 Calcul des rapports de vitesse d'une boîte de vitesse

Le dessin technique de la page 49 représente une boîte de vitesse de moteur transversal ayant pour fonction d'adapter le couple moteur au couple nécessaire à l'avancement du véhicule. La boîte proposée comporte 4 vitesses AV et une marche AR. Une cinquième vitesse peut être proposée en option en modifiant la longueur des arbres primaire et secondaire et en rajoutant un couple d'engrenage sur la gauche du dessin.

- 1°) En fonction du nombre de dents des engrenages sur le dessin, définir le rapport de vitesse entre la vitesse de l'arbre secondaire et l'arbre moteur.
- 2°) Calculer les rapports de vitesse entre les roues et l'arbre moteur.
- 3°) Sachant que le diamètre de la bande de roulement d'une roue est de 520 mm, déterminer pour une fréquence de rotation du moteur de 1000 tr/mn, les vitesses du véhicule en km/h.







## **TD n° 4 : Freinage d'un véhicule automobile et comportement dynamique d'un siège d'enfant dans cette voiture**

Vous roulez en voiture à 90 km/h et devant un danger, vous freinez brusquement. La masse de la voiture est de 800 kg, les coefficients de frottement des pneus sont de 0,8 sur route sèche et de 0,3 sur route mouillée.

1°) Calculer la distance parcourue par votre voiture avant l'arrêt complet pour les deux états de la route.

2°) Vous aborder un virage de rayon 80 m. Définir la vitesse limite pour les deux états de la route. (Rq : la position du CdG du véhicule n'étant pas placée au centre des roues, la voiture peut aussi survivre ou sous-virer)

On souhaite faire un calcul de la résistance d'un système d'attache d'un enfant dans cette voiture. Pour cela, on considère que l'automobile arrive droit dans un mur à la vitesse de 60 km/h. On suppose que la partie avant de la voiture est enfoncée de 1 mètre après le choc. On suppose également que la décélération est constante tout au long du choc.

3°) Mettre en équation le problème afin de trouver la durée du choc et la valeur de la décélération.

4°) Calculer la force d'inertie s'exerçant sur un enfant de 10 kg assis sur le siège arrière.

5°) Calculer la pression de la sangle sur le corps de l'enfant.

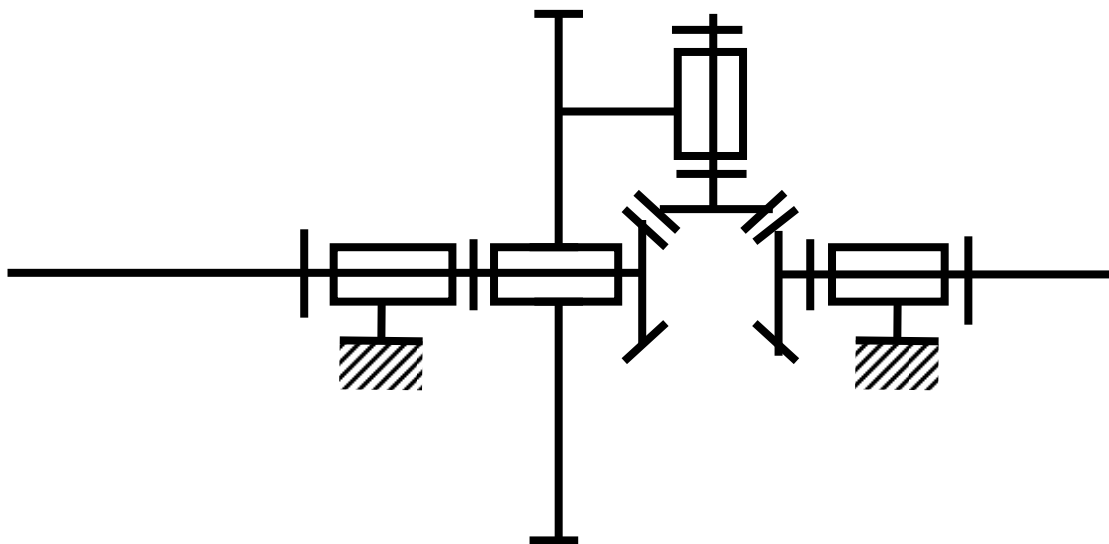
6°) Mêmes questions pour une vitesse en ville de 30 km/h (déformation de 0,40 m).

## TD n° 5 : Etude d'un différentiel d'automobile

Le mécanisme de la boîte de vitesse de la page 48 se compose d'un ensemble de pignons composant les rapports de vitesse et un mécanisme de différentiel permettant de dissocier les vitesses entre les deux roues, pendant un virage. Ce système dans les véhicules à propulsion (roues motrices à l'arrière) est dans le pont (pont différentiel). Pour les véhicules en traction (roues motrices à l'avant), ce mécanisme est directement dans la boîte de vitesse.

Pour un véhicule à 4 roues motrices, 3 différentiels sont nécessaires pour la bonne tenue de route du véhicule.

1°) Calculer par la cinématique du solide, la relation entre la vitesse angulaire de la pièce 1 par rapport aux pièces 5 et 5bis. Envisager les différents cas de fonctionnement de ce différentiel.



## TD n° 6 : Etude d'un système roue et vis sans fin

Un arbre auquel on applique un couple moteur  $C_m$  (C'est à dire un torseur ne possédant qu'une composante de moment suivant l'axe de l'arbre), porte une vis sans fin qui engrène avec une roue à denture hélicoïdale. La vis est soumise de la part de la roue à des actions  $\vec{A}$ ,  $\vec{T}$ , et  $\vec{R}$  que l'on considère appliqués au point M situé dans la zone de contact entre la roue et la vis (on considérera M au milieu du montage des roulements).

Ecartement des deux roulements  $l = 200$  mm, Diamètre primitif de la vis  $d = 50$  mm,

Diamètre primitif du pignon  $D = 150$  mm, Effort Axial pignon/vis  $A = 2\,400$  N,

Effort Tangentiel pignon/vis  $T = 160$  N, Effort Radial pignon/vis  $R = 840$  N

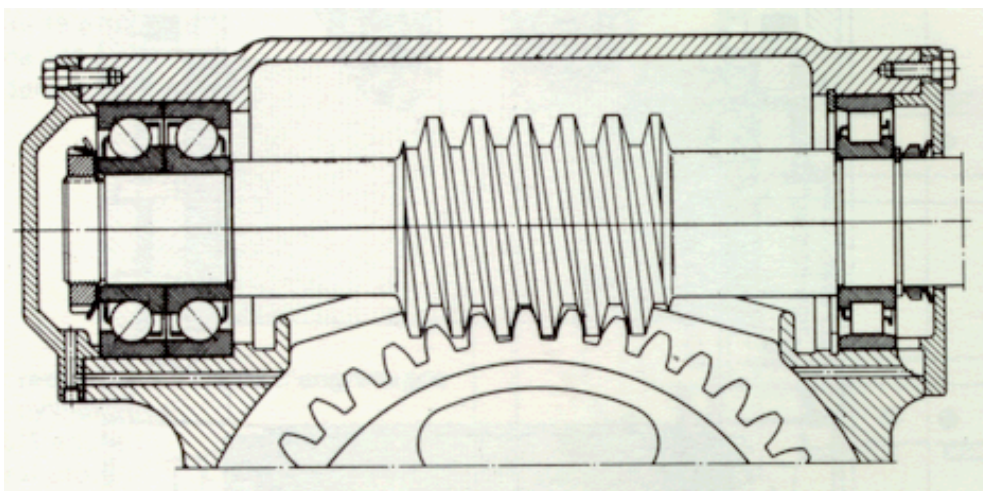
1°) Schématiser le mécanisme

2°) Calculer les éléments de réduction des torseurs d'actions de contact des paliers sur la vis ainsi que le couple moteur  $C_m$ .

3°) L'arbre tourne à 1500 tr/min, quelle est la puissance du moteur permettant de l'entraîner ?

4°) Sachant que la roue dentée a 48 dents et que la vis a un filet, déterminer la vitesse de rotation et le couple de l'arbre de sortie.

5°) déterminer le rendement de ce mécanisme



## TD n° 7 : inertie équivalente d'un mécanisme

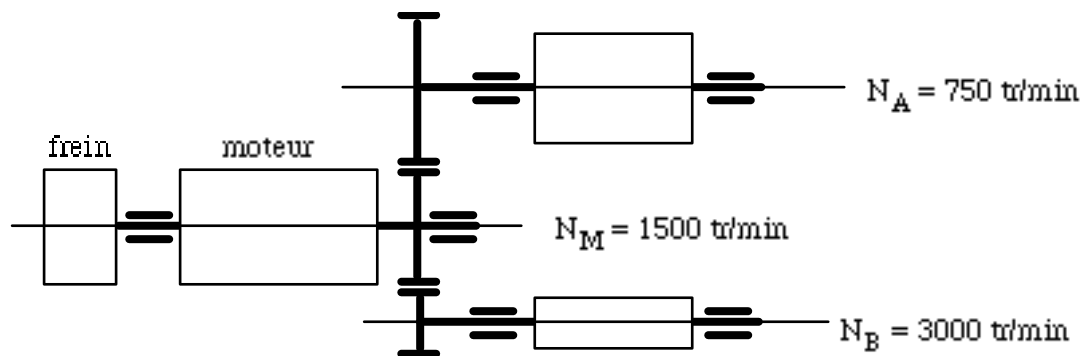
Un moteur électrique tourne à la vitesse constante de 1500 tr/min. Il comporte un frein en bout d'arbre. Ce moteur entraîne deux arbres A et B.

L'arbre A tourne à 750 tr/min et les mécanismes montés sur cet arbre sont équivalents au point de vue inertie à un cylindre d'acier de diamètre 400 mm et de longueur 400 mm.

L'arbre B tourne à 3000 tr/min et les mécanismes montés sur cet arbre sont équivalents au point de vue inertie à un cylindre d'acier de diamètre 100 mm et de longueur 400 mm.

L'inertie du rotor du moteur électrique et du tambour de frein est égale à  $0,122 \text{ kg m}^2$ .

On négligera les frottements aux appuis des différents arbres. La masse volumique de l'acier est  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ .



On ouvre l'interrupteur qui commande le moteur, on agit sur le frein et on supprime les résistances de travail (outil par exemple).

1°) Calculer la masse et le moment d'inertie de chaque cylindre par rapport à son axe.

2°) Calculer la valeur du couple de frottement que doit exercer le frein sur l'arbre moteur pour arrêter l'ensemble du système dans une période de temps correspondant à 20 tours du rotor du moteur. Quelle est la chaleur produite par frottement dans le frein ?

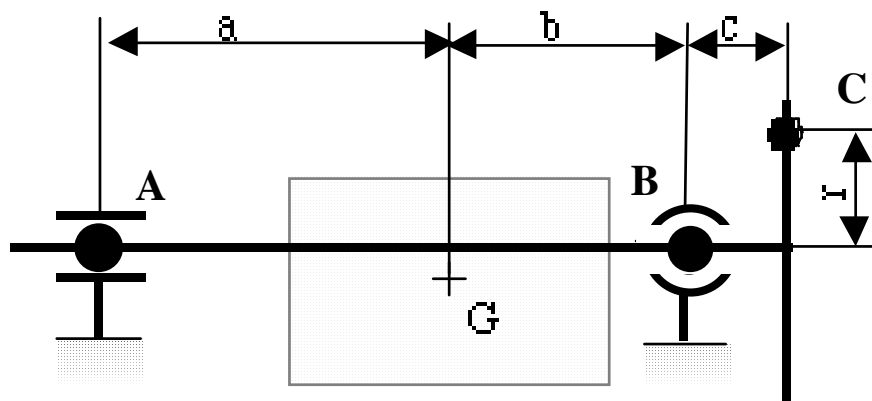
3°) Sans assurer le freinage, la coupure de l'alimentation du moteur entraîne une rotation pendant 225 secondes. Définir la décélération du moteur électrique.

4°) En déduire le couple de frottement équivalent de l'ensemble

5° en option) Recalculer la question 2 en prenant en compte le couple de frottement que nous considérerons constant lors du ralentissement.

## TD n° 8 : Equilibrage d'un moteur électrique

Un moteur électrique est composé d'un rotor monté sur un arbre et d'un stator liés par une liaison pivot réalisée par deux paliers A et B. Du fait de défauts inévitables apparaissant lors de la fabrication des pièces ou lors du montage, le centre de gravité du rotor n'est pas exactement sur l'axe de rotation. Comme nous allons le voir, ceci va générer des efforts supplémentaires sur les paliers A et B qui se traduiront par des vibrations, du bruit et des risques d'usure prématurée des roulements à billes constituant les paliers. Pour diminuer les efforts, on fixe sur l'arbre un disque appelé disque d'équilibrage sur lequel est placé au point C, une masse  $m$  à une distance  $r$  de l'axe de rotation.

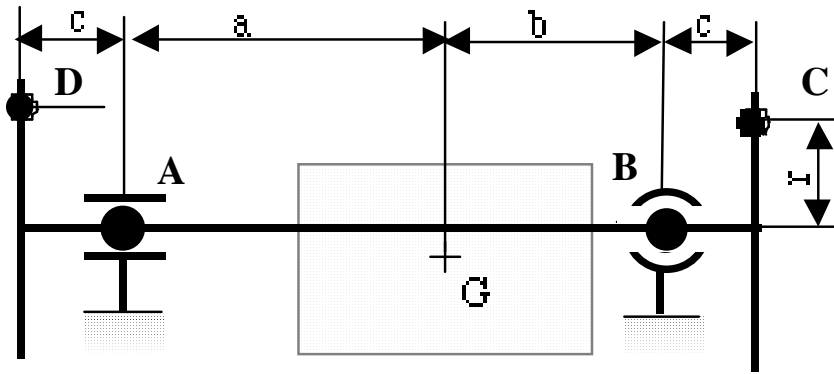


La distance entre le centre de gravité G du rotor et l'axe de rotation est  $e = 10 \mu\text{m}$ . La masse  $M$  du rotor est égale à 60 kg et sa vitesse de rotation est  $N = 3000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$ . Les cotes  $a$ ,  $b$  et  $c$  valent respectivement 300 mm, 200 mm et 100 mm. Le rayon  $r$  vaut 100 mm. On négligera l'action de la gravitation.

1) Dans un premier temps, aucune masse n'est placée en C. Isoler le rotor. A quelles actions est-il soumis ? Calculer les efforts des paliers sur l'arbre en A et B. Pour simplifier, on fera les calculs dans la configuration de la figure.

2) Dans un deuxième temps, on place une masse  $m$  en C à l'opposé de G de telle sorte que A, B, C et G soient dans un même plan. Calculer les efforts des paliers sur l'arbre en A et B. Existe-t-il une valeur de  $m$  pour laquelle l'effort exercé par le palier B est nul ? Calculer alors l'effort exercé par le palier A. Existe-t-il une valeur de la cote  $c$  pour laquelle cet effort est nul ? Est-ce possible dans la pratique ?

3) On dispose dans un troisième temps, un deuxième disque d'équilibrage à une distance  $c$  à gauche du point A. Est-il alors possible d'annuler simultanément les efforts en A et B ?

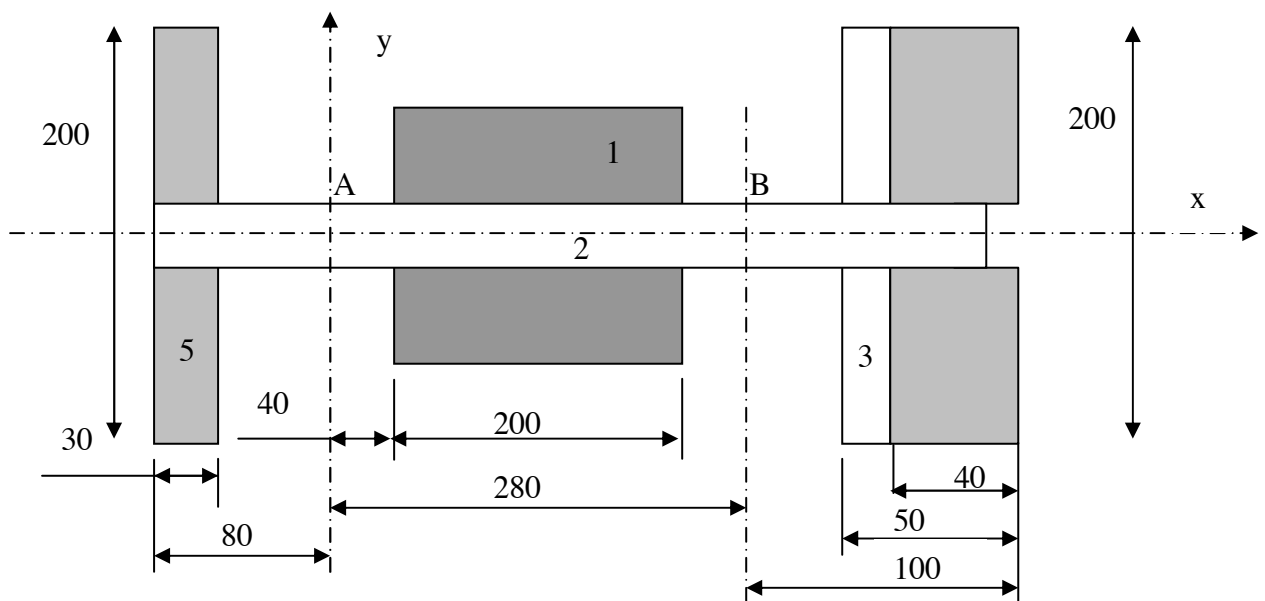


## Synthèse n° 9 : Etude d'un touret à meuler

L'étude proposée est celle d'un touret à meuler dont la vitesse de rotation stabilisée est de 2850 tr/mn. Ce touret à meuler sert à affûter des outils de coupe.

Ce touret se compose d'un rotor ① de diamètre 100 mm et d'une longueur de 200 mm, monté sur un axe en acier ② de diamètre (considéré constant) de 20 mm et de 450 mm de long. Les deux paliers A et B constitués par un roulement radial à une rangée de billes sont distants de 280 mm. Ces roulements de série 6004 ont un diamètre intérieur de 20 mm, un diamètre extérieur de 42 mm et une largeur de 12 mm.

Une meule ⑤ de diamètre 200 mm et de largeur 30 mm est montée du côté gauche de ce touret pour l'affûtage des forêts sur la zone circonférentielle de la meule. Du côté droit avec un diamètre de 200 mm également, une meule ④ de 40 mm de large est montée sur un flasque ③ en acier de 10 mm d'épaisseur, pour permettre un affûtage par surface plane (sur le côté de la meule) des faces de dépouille d'outils. La masse totale de ce touret est de 40 kg.



L'axe de rotation sera noté x et l'axe vertical y en A. L'axe z sera choisi pour former un trièdre direct.

Les masses volumiques constituant les différentes parties de cet ensemble sont de :

3000 kg/m<sup>3</sup> pour les meules ④ et ⑤,

6000 kg/m<sup>3</sup> pour le rotor ①,

7800 kg/m<sup>3</sup> pour les parties ② & ③ en acier.

La position du centre de gravité de l'ensemble tournant est à 178 mm du point A sur l'axe x.

Le temps d'accélération de l'ensemble tournant est de 3 s pour permettre d'atteindre la vitesse de rotation maximale de 2850 tr/mn.

Le temps de ralentissement est de 55 s pour obtenir l'arrêt des meules après coupure du courant moteur.

### PREMIERE PARTIE

**1<sup>ère</sup> question :** Calculer le poids et le moment d'inertie du rotor  $\odot$  suivant l'axe de rotation.  
( $P = 88,76 \text{ N}$  ;  $J_{Ax} = 1,17 \cdot 10^{-2} \text{ kg.m}^2$  )

**2<sup>ème</sup> question :** En faisant l'hypothèse que les accélérations angulaires sont constantes, établir les expressions de la cinématique de cet ensemble tournant  $\theta(t)$  et  $\omega(t)$  :

à l'instant  $t = t_1$  , pendant le démarrage, juste après l'enclenchement du contacteur de ce touret ;

pour  $t = t_2$ , pendant le ralentissement, c'est-à-dire après le déclenchement du contacteur pour l'arrêt de cette machine. ( $w_1' = 99,5 \text{ rad/s}^2$  ;  $w_2' = -5,43 \text{ rad/s}^2$  )

**3<sup>ème</sup> question :** Sachant que l'inertie de l'ensemble tournant est de  $5,6 \cdot 10^{-2} \text{ kg.m}^2$ , calculer le couple de frottement dans les roulements et dans les joints d'étanchéité, supposé constant et indépendant de la vitesse de rotation.

Des caractéristiques du ralentissement, en déduire le nombre de tours de la meule entre le déclenchement du contacteur pour l'arrêt de cette machine et son arrêt complet.

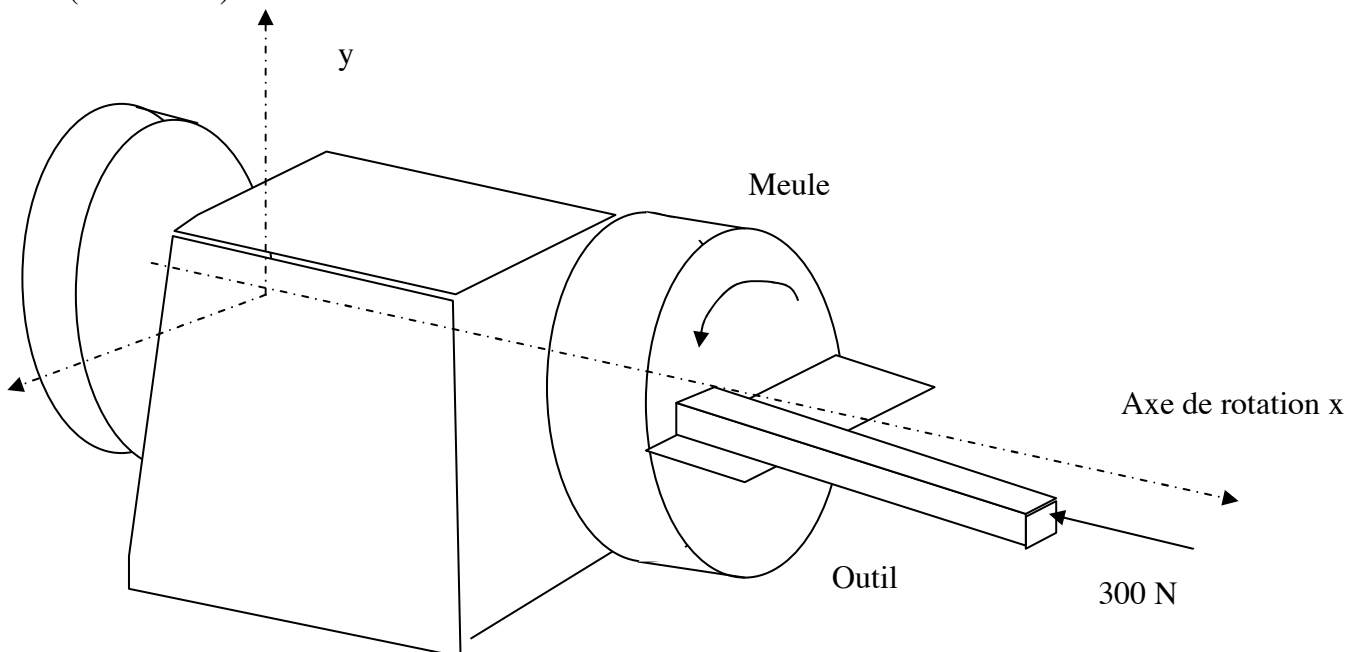
( $C_{f2} = 0,304 \text{ m.N}$  ;  $\theta = 8207 \text{ rad} = 1306 \text{ tours}$  )

**4<sup>ème</sup> question :** Des caractéristiques de ce touret, calculer le couple moteur nécessaire pour l'obtention de la vitesse nominale en 3 s après enclenchement du contacteur.

( $C_m = 5,88 \text{ m.N}$  )

### DEUXIEME PARTIE

On utilise ce touret pour affûter un outil sur la meule de droite. Cet outil est placé sur une table d'appui articulée horizontalement et inclinée de  $6^\circ$ . Le point de contact de l'outil sur la meule est à 80 mm de l'axe de rotation du touret, dans le plan Axz. Lors de l'affûtage, on exerce manuellement un effort sur l'outil de 300 N suivant la direction de l'axe de rotation (effort axial). L'effort radial est considéré comme nul.





**5<sup>ème</sup> question :** En considérant que le coefficient de frottement entre l'outil et la meule est de 0.3, déterminer l'effort tangentiel de l'outil sur la meule.

$$(T = 90 N)$$

**6<sup>ème</sup> question :** Sachant que la masse totale de l'ensemble tournant est de 19,132 kg, déterminer les actions statiques sur les paliers A (liaison rotule) et B (liaison linéaire annulaire) en prenant en compte les poids propres des pièces et l'action de l'outil sur la meule de droite. ( $X_A = F_A$  ;  $Y_A = 95 N$  ;  $Z_A = 86 N$  ;  $Z_B = -86 N$  ;  $Y_B = 3 N$  ;  $C_m = 7,2 m.N$ )

### TROISIEME PARTIE

La fixation de ce touret à meuler se fait par l'intermédiaire de 4 vis CHC M8-30 sur les sommets d'un rectangle horizontal de 320 sur 160 mm centré par rapport aux roulements, à une altitude de -150 mm de l'axe de rotation. Ces vis sont de classe 5-6 soit d'une résistance à la rupture à l'extension de 500 MPa et le coefficient de sécurité choisi est égal à 5.

Deux pions de centrage assurent le positionnement isostatique de ce touret par rapport au bâti avec un ajustement  $\varnothing 8 H7g6$  entre le touret et chaque pion de positionnement et un  $\varnothing 8 P7g6$  avec le bâti.

L'effort de serrage de chaque vis est assuré par une clé dynamométrique à couple étalonné.

Le diamètre en fond de filet d'une vis est égal à  $d_3 = \text{diamètre nominal} - 1,2268 * \text{pas}$

Le moment de serrage dans la vis est donné à partir de l'effort de traction par la relation expérimentale :

$$M_t = [0,161 * \text{pas} + \mu * (0,583 * d_2 + 0,5 * dm)] F$$

dans laquelle  $d_2 = \text{diamètre sur flanc de filet} = d \text{ nominal} - 0.65 \text{ pas}$

$dm = \text{diamètre moyen de la portée sous la tête de la vis}$

$\mu = \text{coefficient de frottement des filets et de la portée sous tête}$

$\text{pas} = \text{pas de la vis}$  ,  $F = \text{effort de traction dans la vis}$

Pour un moment de serrage en m.N, mettre les dimensions en m.

**7<sup>ème</sup> question :** Déterminer la résistance pratique à l'extension des vis.

- A partir de la section d'une vis en fond de filet, calculer l'effort dans chaque vis à ne pas dépasser pour rester sous la résistance pratique à l'extension déterminée précédemment.

- Calculer le moment de serrage à ne pas dépasser dans les vis utilisées pour fixer le touret sur le bâti, sachant que le diamètre moyen de la portée sous la tête de la vis est de 10 mm et que le coefficient de frottement est de 0,15.

$$(R_{pe} = 10 \text{ mPa} ; F = 3\,284 \text{ N} ; M_s = 5,19 \text{ m.N})$$

**8<sup>ème</sup> question :** Calculer la contrainte dans l'arbre de diamètre 20 mm du touret pour un couple moteur de 10 m.N.

$$(\tau = 6,37 \text{ MPa})$$

### QUATRIEME PARTIE

Une vibration anormale apparaît pendant le fonctionnement de ce touret. La meule de gauche, de 30 mm de large, a été mal montée et la position de son centre de gravité est excentrée de 0,5 mm par rapport à l'axe de rotation.

**9<sup>ème</sup> question** : A partir de la masse de cette meule et de l'excentration proposée, calculer la force de balourd  $F_b$  résultante de ce mauvais montage à la vitesse de rotation nominale.

$$(F_b = 124,7 N)$$

**10<sup>ème</sup> question (bonus)** : Calculer la pulsation des oscillations libres du touret fixé au bâti à partir de la raideur de la fixation que l'on prendra pour cette question, égale à  $1,6 \cdot 10^9$  N/m et de la masse du touret.

- En supposant que l'amortissement  $\xi$  de la fixation est nul, établir que le déplacement vibratoire du touret a pour expression :

$$x(t) = \frac{Fb}{K} \cdot \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \cdot \sin(\omega t - \theta)$$

avec  $\omega_0$  = pulsation des oscillations libres

avec  $\omega$  = pulsation de rotation

- Calculer le déplacement et l'accélération des vibrations du touret.

$$(\omega_0 = 6\,324 \text{ rad/s} ; x_t = 7,13 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 0,071 \mu\text{m} ; a_t = 6 \cdot 10^3 \text{ m/s}^2)$$



ECOLE  
POLYTECHNIQUE  
de SAINT-NAZAIRE  
Formation  
Ingénieur

Année  
2008-2009

## CONTROLE DE MECANIQUE

du Mercredi 19 novembre 2008

Calculatrice, Polycopié, Cours et TD autorisés

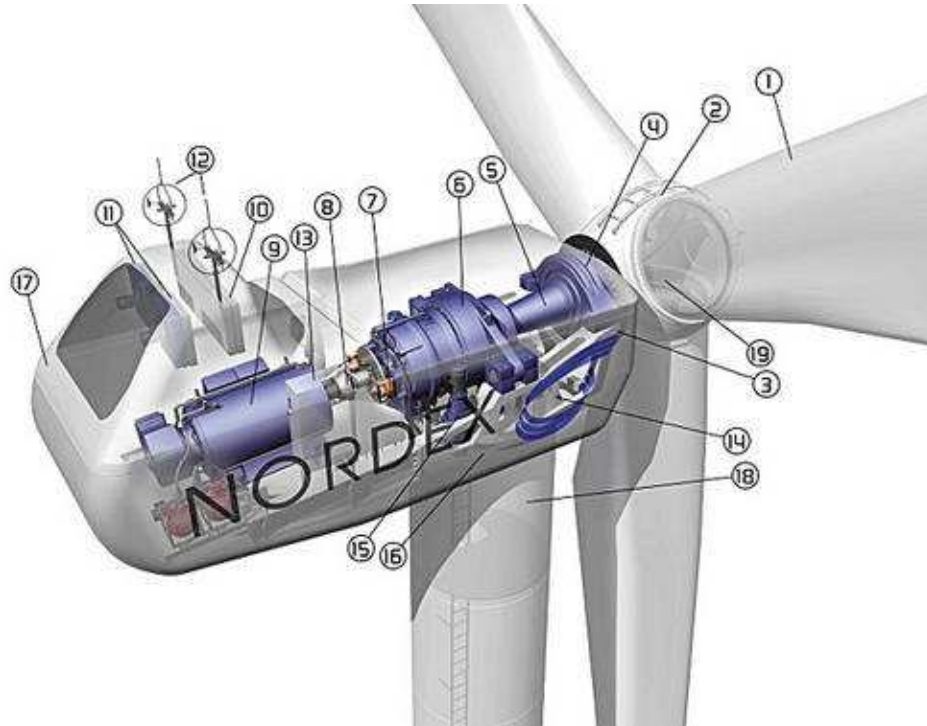
Nbre de pages : 4  
: 2 heures

Durée

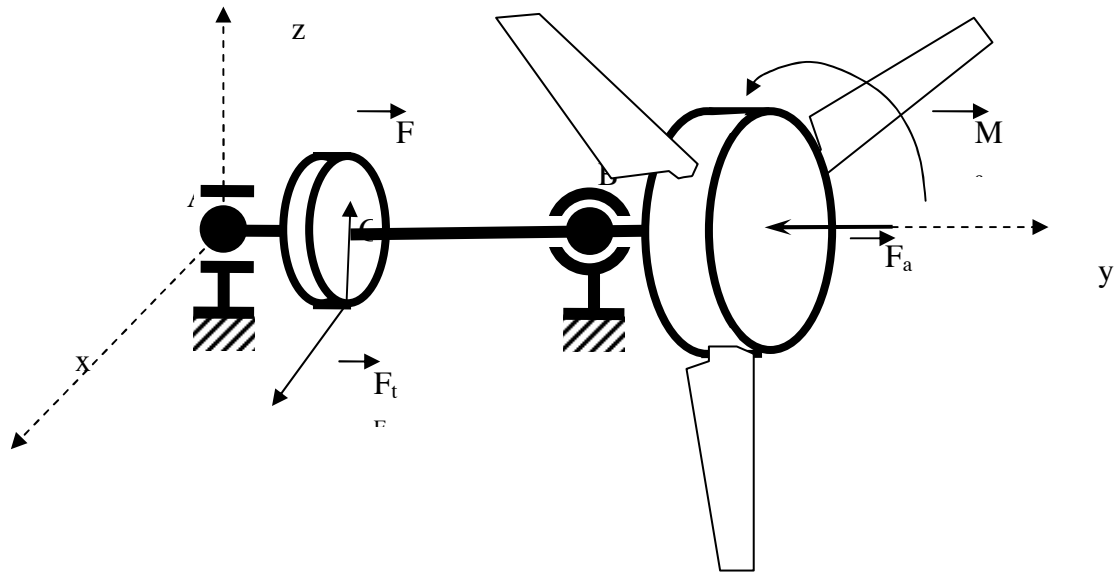
### Étude d'une éolienne

Le parc éolien français augmente d'année en année avec la construction de nouvelles éoliennes de puissance de 2 à 2,5 MW et bientôt de 5 MW. L'éolienne étudiée est une éolienne de 90 m de diamètre de 2,3 MW, composée de 3 pales

(1) en composite à fibre de verre dont la masse unitaire est de 10 tonnes. La fréquence de rotation du rotor est de 9,6 à 16,8 tr/min. La vitesse d'accrochage est de 3 m/s jusqu'à une vitesse maximale de 25 m/s sachant que la puissance nominale est atteinte à partir de 12 m/s soit 2 300 kW pour une tension de 660 V. L'axe de la génératrice (9) de type asynchrone à double alimentation tourne de 740 à 1300 tr/min grâce à un multiplicateur (5) de vitesse à deux étages avec un étage à roue dentée droite dont le rapport global est de 77,44. Un frein hydraulique à disque assure le freinage du rotor de même qu'un frein azimutal bloque l'orientation de l'éolienne après un calcul de la direction moyenne du vent par deux blocs girouette-anémomètre (12) et le pilotage par deux moteurs sur une couronne dentée.



La liaison rotule au point B de l'axe du rotor supporte des efforts dans les 3 directions (x, y, z) et la liaison linéaire annulaire au point A, encaisse seulement des efforts sur l'axe x et z. Un engrenage de diamètre 640 mm à denture droite, situé à 500 mm du palier A (distance  $AC = \ell = 500$  mm), assure l'entraînement du pignon du deuxième étage du multiplicateur. La distance AB est égale à  $4 \ell$ . La force axiale maximale due au vent et appliquée au point D est égale à 80 000 N.

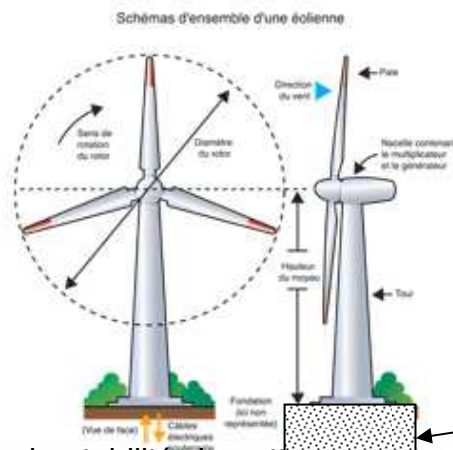


I – Etude de l'ensemble (5 pts)

1.1. En fonction de la fréquence de rotation de la machine de 16,8 tr/min, et du diamètre des pales de 90 m, définir la vitesse tangentielle du bout de pale et comparer celle-ci à la vitesse du son. Qu'en pensez-vous ?

1.2. Si la puissance utile de l'éolienne est de 2300 kW avec un rendement de l'alternateur de 0.96 et du multiplicateur de 0,89, définir la puissance absorbée par l'éolienne.

1.3. Sachant que la fréquence de rotation du rotor pour une vitesse maximale est de 16,8 tr/min, définir le couple assuré par le vent sur les pales du rotor.



1.4 Pour la stabilité de cette éolienne, un bloc de béton de 10 m par 10 m, sur une profondeur « x », est réalisé au pied de celle-ci pour en assurer la stabilité. On considère que le bloc de béton est posé à plat sur le sol et qu'il peut basculer sur l'arrière, par l'action du vent, en fonction de la direction du vent. On fait les hypothèses simplificatrices que le centre de gravité de l'éolienne est placé au dessus du centre de gravité du bloc de béton, sur l'axe du pylone de l'éolienne et que dans le calcul demandé, nous ne tiendrons pas compte du poids de l'éolienne dans ce basculement. Si on multiplie l'effort du vent de 80 000 N par 5

(pour la sécurité et prendre en compte l'action du vent sur l'ensemble de l'éolienne, notamment en cas de tempête), cette action appliquée au point D (axe du rotor) à une hauteur de 70 m, définir la valeur minimale de « x » pour que l'éolienne ne bascule pas sous l'action du vent (accélération de la pesanteur de  $9,81 \text{ m/s}^2$  et masse volumique du béton est de  $2400 \text{ kg/m}^3$ ).

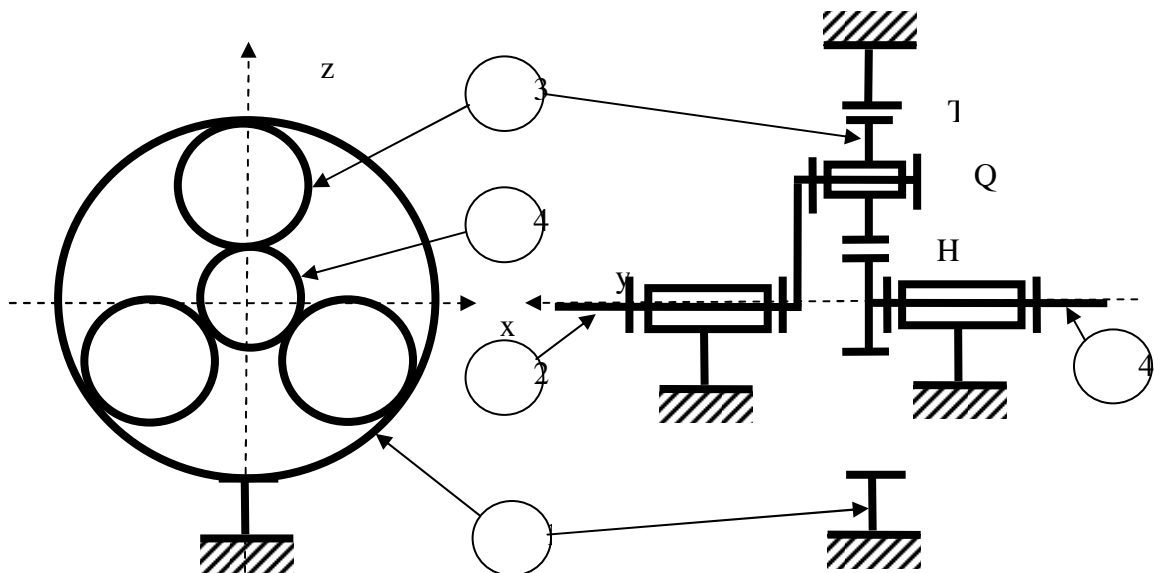
## II Etude des actions mécaniques au niveau des paliers (6 pts)

2.1. En rappelant que les points B, C et D sont sur le l'axe Ay du rotor de l'éolienne et en appliquant le Principe Fondamental de la Statique, déterminer les équations littérales des actions dans les paliers A et B à partir des efforts du vent au point D et des efforts dans l'engrenage appliqués au point E (on rappelle que la force radiale  $F_r$  est égale à la force tangentielle  $F_t$  multipliée par la tangente d'un angle de  $20^\circ$ ).

2.2. Effectuer les applications numériques de cette étude en déterminant les composantes des actions mécaniques dans les paliers A et B (Pour ceux qui n'auraient pas réussi la question 1.3, la valeur du couple du vent sur le rotor sera égale à  $1\,200 \text{ kN.m}$ ).

## III – Etude cinématique d'un train épicycloïdal (4 pts)

Certains multiplicateurs de vitesse dans les éoliennes utilisent un train épicycloïdal, représenté sur le schéma ci-dessous, afin de mieux répartir les efforts et améliorer le rendement de la machine.



Une couronne dentée appelée (1) est liée au bati de la nacelle, donc fixe. Un arbre d'entrée (2) lié au rotor entraîne trois pignons appelés satellite (3) qui entraîne en rotation le pignon de sortie (4) du premier étage du multiplicateur de vitesse . Si on définit  $\omega_2$  et  $\omega_4$  les vitesses angulaires respectivement de l'arbre d'entrée et de l'arbre de sortie, sachant que les rayons de roues dentées sont  $R_1$ ,  $R_3$ ,  $R_4$

Déterminer la vitesse tangentielle du point de contact H entre la roue (4) et la roue (3)

Déterminer la vitesse d'un point Q de l'axe de rotation de la pièce (3) par rapport à la pièce (2)

La vitesse du point de contact T entre la roue (3) et la roue (1) est nulle, définir le rapport de vitesse entre (4) et (2).

En déduire le rapport de vitesse si  $R_4 = 50$  mm,  $R_3 = 80$  mm,  $R_1 = 210$  mm

#### IV – Etude dynamique de l'éolienne ( 5 pts)

La partie tournante de l'éolienne peut se modéliser par un rotor de l'alternateur de 4000 kg et de 1 m de diamètre extérieur, d'un réducteur de moment d'inertie de  $4880 \cdot 10^3$  kg.m<sup>2</sup> ramené sur l'axe du rotor et d'un corps du rotor (moment d'inertie =  $30 \cdot 10^3$  kg.m<sup>2</sup>) sur lequel sont montés les 3 pales.

Le calcul du moment d'inertie d'une pale ramenée sur l'axe de rotation du rotor est simplifiée pour être égale à  $[ m \cdot h^2/12 + m \cdot (R^2+r^2)/4 + m \cdot d^2 ]$  où :

- la masse m de la pale est de 10 000 kg,
- h, la longueur de pale est de 43,80 m,
- les rayons du tube équivalent sont  $R = 500$  mm et  $r = 470$  mm,
- d la distance du centre de Gravité de la pale par rapport à l'axe de rotation est de 23 m.

La fréquence de rotation du rotor est de 16,8 tr/min.

La rotation verticale pour suivre la direction du vent se fait à une vitesse maximale angulaire de 0,05 rad/s.

- 4.1. Calculer le moment d'inertie du rotor de l'alternateur (considéré comme un cylindre plein) ;
- 4.2. Calculer le moment d'inertie équivalent du rotor de l'alternateur ramené sur l'axe du rotor de l'éolienne ;
- 4.3. Calculer le moment d'inertie d'une pale (considéré comme un tube uniforme) par rapport à son centre de gravité ;
- 4.4. Calculer le moment d'inertie global de l'ensemble;
- 4.5. Calculer le couple gyroscopique lors de la rotation à vitesse maximale de l'éolienne et le changement de direction du vent, nécessitant de réorienter la nacelle de l'éolienne.