Contrôle de Logique 2009

David Delfieu

Barème sur 20 pts - 25 novembre 2009 - sans documents - 1H15

1 Logique combinatoire

1.1 Arithmétique binaire (2 pts)

Définition 1 *Une fonction f est involutive ssi* $f(f(x)) = x$

1. Montrer que la fonction CA_1 est involutive.
2. Qu'est-ce que cela signifie en terme arithmétique ?

Solution

$$CA_1(N) = 2^n - N - 1$$

$$CA_1(CA_1(N)) = 2^n - CA_1(N) - 1 = 2^n - (2^n - N - 1) - 1 = N$$

$CA_1(N)$ correspond à l'opposé d'un nombre, CA_1 est involutive ce qui correspond à l'énoncé suivant : "l'opposé de l'opposé d'un nombre est ce nombre lui-même".

1.2 Simplification de fonctions logiques (6 pts)

1.2.1 Simplification arithmétique (3 pts)

1. Simplifier l'expression suivante en définissant un théorème :

$$T_1 : (a.b + a.X).(a.\overline{b} + \overline{b}.X)$$

2. Montrer comment en utilisant, entre autre, le théorème précédent on peut simplifier rapidement la fonction logique suivante :

$$f_1(a, b, c, f, g) = ((a + b).c.b + (a + b).c.(f\overline{g} + \overline{f}g)).((a + b).c.\overline{b} + \overline{b}.(f.\overline{g} + \overline{f}.g))$$

Solution

$$(a.b + a.X).(a.\overline{b} + \overline{b}.X) = a.X.a.\overline{b} + a.X.\overline{b}.X = a.\overline{b}.X + a.\overline{b}.X = a.\overline{b}.X$$

Pour f_3 posons : $a = (a+b).c$, $b = b$, $X = (f\overline{g} + \overline{f}g)$
d'après le théorème T_1, on a :

$$f_3 = a(b+c).\overline{b}(f\overline{g} + \overline{f}g)$$

Ce qui se simplifie en :$f_3 = a.\overline{b}.c.(f\overline{g} + \overline{f}g)$

1.2.2 Table de Karnaugh (3 pts)

Donner l'équation simplifiée de la f_2 fonction suivante :

f_2(a,b,c,d,e)

de \ abc	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	1	1	1	1	1	1	1
01	1	0	0	0	1	0	1	1
11	0	0	0	0	0	0	0	1
10	1	1	0	1	1	1	1	1

Solution

f_2(a,b,c,d,e)

$\overline{d}.\overline{e}$

de \ abc	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	1	1	1	1	1	1	1
01	1	0	0	0	1	0	1	1
11	0	0	0	0	0	0	0	1
10	1	1	0	1	1	1	1	1

f_2(a,b,c,d,e)

$a.\overline{b}.\overline{c}$

de \ abc	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	1	1	1	1	1	1	1
01	1	0	0	0	1	0	1	1
11	0	0	0	0	0	0	0	1
10	1	1	0	1	1	1	1	1

f_2(a,b,c,d,e)

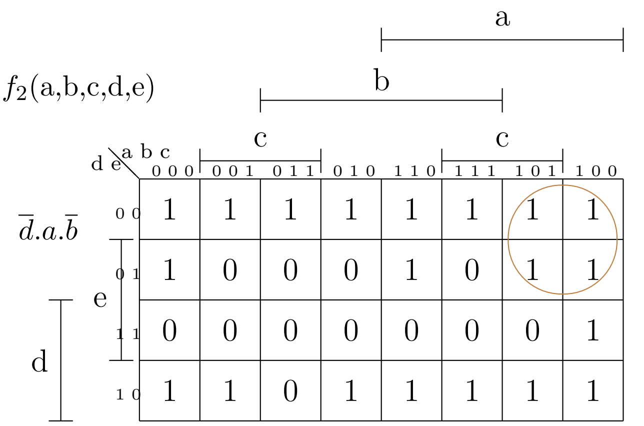
$\overline{d}.\overline{b}.\overline{c}$

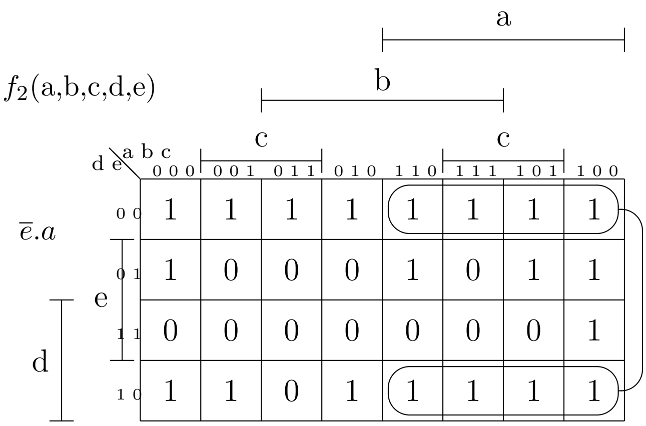
de \ abc	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	1	1	1	1	1	1	1
01	1	0	0	0	1	0	1	1
11	0	0	0	0	0	0	0	1
10	1	1	0	1	1	1	1	1

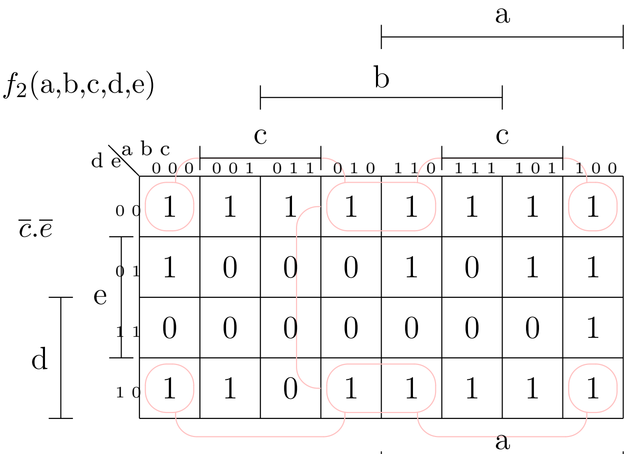
f_2(a,b,c,d,e)

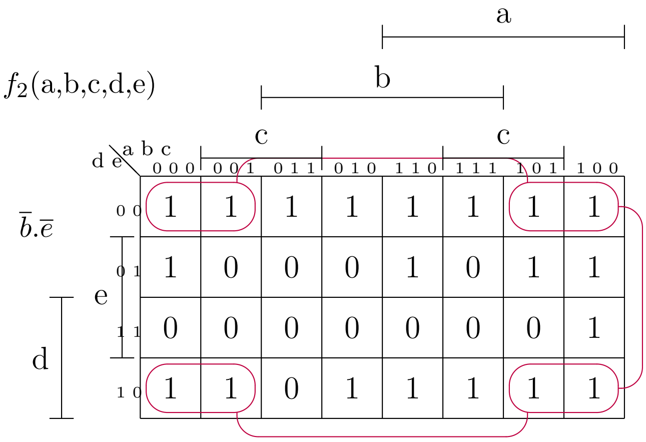
$\overline{d}.a.\overline{c}$

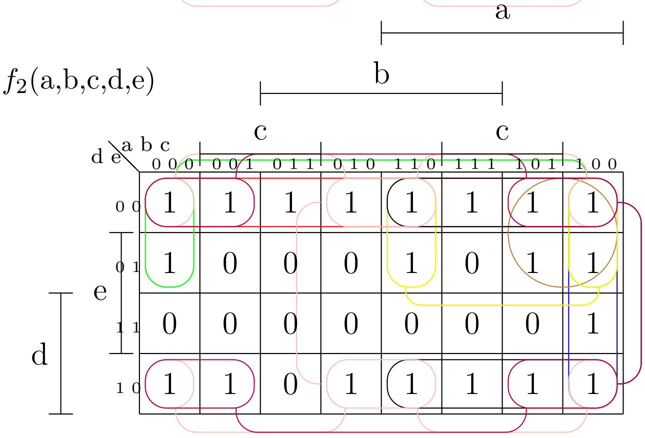
de \ abc	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	1	1	1	1	1	1	1
01	1	0	0	0	1	0	1	1
11	0	0	0	0	0	0	0	1
10	1	1	0	1	1	1	1	1











$$f = \overline{d}.\overline{e} + a.\overline{b}.\overline{c} + \overline{d}.\overline{b}.\overline{c} + \overline{d}.a.\overline{c} + \overline{d}.a.\overline{b} + \overline{e}.a + \overline{c}.\overline{e} + \overline{b}.\overline{e}$$

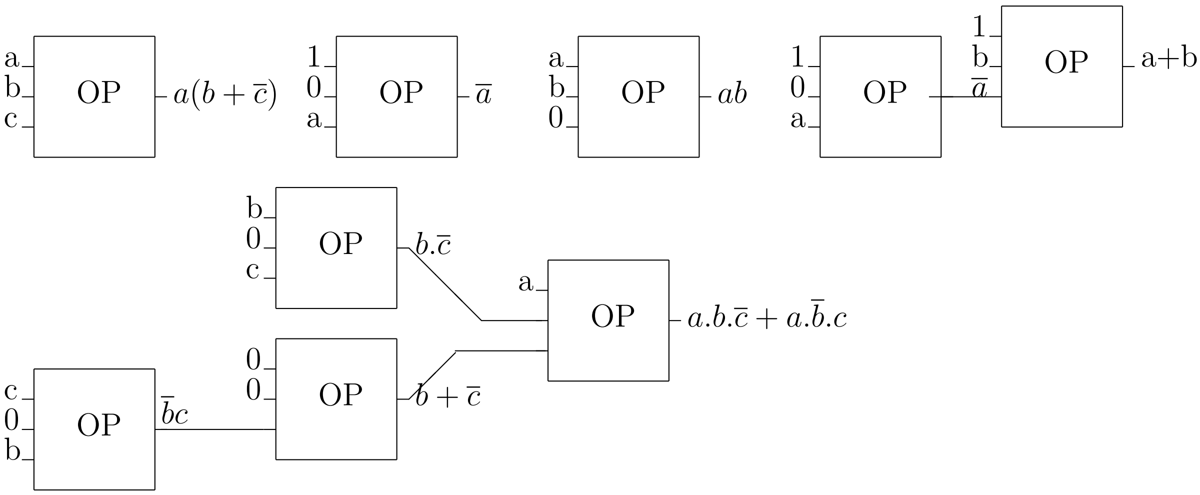
1.3 Implémentations contraintes de fonctions logiques

Opérateur Logique complet (3,5 pts)

- Montrer que $OP(a,b,c) = a.(b+\overline{c})$ est un opérateur logique complet.
- Implémenter la fonction suivante exclusivement à l'aide de cet opérateur.

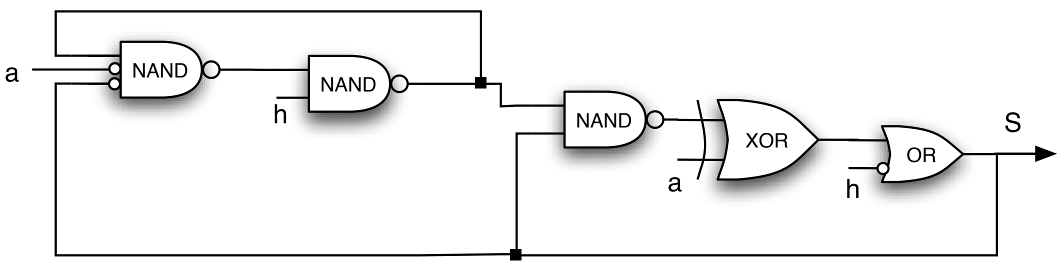
$$f_3(a,b,c,d,f,g) = a.b.\overline{c} + a.\overline{b}.c$$

Solution



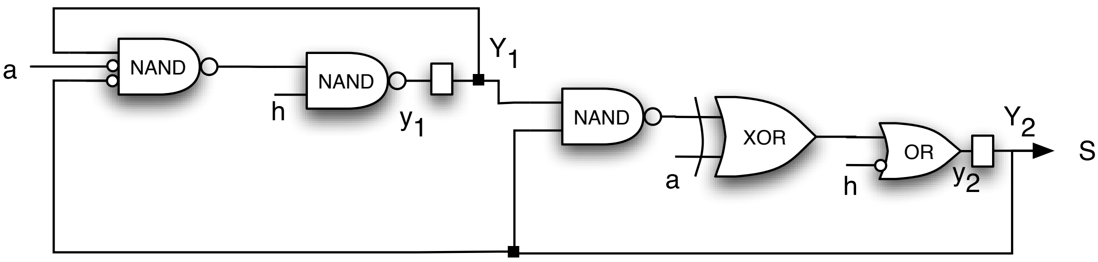
2 Logique séquentielle (8 pts)

Analyser le circuit suivant.



Convention de notation :

- $Y_0, Y_2, ...Y_i$: les indices croissent lorsque l'on identifie un rebouclage de haut en bas puis de gauche à droite.
- De plus, on nommera les états stables de $q_0, q_1, ...q_i$ (avec la convention utilisée pour les Y_i)



Solution : Il y a 2 rebouclages et donc 2 variables internes Y_1 et Y_2.

Equations

$$\begin{cases} y_1 = \overline{h.\overline{\overline{a}.Y_1.\overline{Y_2}}} \\ y_2 = \overline{h} + (a \oplus \overline{Y_1.Y_2}) \\ S = Y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \overline{h} + \overline{a}.Y_1.\overline{Y_2} \\ y_2 = \overline{h} + \overline{a}.\overline{Y_1.Y_2} + a.\overline{\overline{Y_1.Y_2}} \\ S = Y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \overline{h} + \overline{a}.Y_1.\overline{Y_2} \\ y_2 = \overline{h} + \overline{a}.\overline{Y_1} + \overline{a}.\overline{Y_2} + a.Y_1.Y_2 \\ S = Y_2 \end{cases}$$

f_2(a,h,Y_1,Y_2)

Y_1Y_2 \ ah	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	11	01	00	11
0 1	11	01	00	11
1 1	11	00	01	11
1 0	11	11	00	11

Tables d'excitation et des états nommés

f_2(a,h,Y_1,Y_2)

Y_1Y_2 \ ah	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	q_0	q_1	q_2	q_3
0 1	q_0	q_1	q_2	q_3
1 1	q_0	q_1	q_2	q_3
1 0	q_0	q_1	q_2	q_3

Machine de Moore : La sortie S relative à chaque état est représentée sous forme d'exposant dans l'état.