Contrôle de Logique 2010

David Delfieu

Barème sur 20 pts - 30 novembre 2010 - sans documents - 2H

1 Logique combinatoire

1.1 Arithmétique binaire (2 pts)

1. Quelle est la définition du complément restreint d'un nombre N exprimé en base B sur n éléments binaires.
2. Pour des nombres exprimés sur n bits, calculer $CA_1(0)$ et $CA_1(CA_1(0))$ et montrer que le complément à un est une représentation des nombres négatifs qui utilisent deux zéros. Quelle est leur représentation sur $n = 4$ bits ?

Solutions

$$\begin{aligned} CA_R(N) &= B^n - N - 1 \\ CA_1(0) &= 2^n - 0 - 1 = 2^n - 1 = 11..1 \\ CA_1(CA1(0)) &= CA1(2^n - 1) = 2^n - 2^n + 1 - 1 = 0 = 00..0 \end{aligned} \tag{1}$$

Sur 4 bits, 0 à deux représentations : 0000 et 1111.

1.2 Simplification de fonctions logiques (6 pts)

1.2.1 Simplification arithmétique (3 pts)

1. Définir deux théorèmes pertinents pour simplifier la fonction suivante, puis la simplifier :
   $f_1(a, b) = (X + a).(X + b).(X + \overline{a} + \overline{b})$
2. Simplifier :
   $f_2(a, b, c, d, e, f, g) = (a + \overline{a.b}(b + efg)).(a + \overline{a.b}(b + efg) + a(b\overline{c} + ef\overline{g} + f\overline{a}b))$
3. Simplifier :
   $f_3(E, F, G) = (E + F + \overline{G})(\overline{E} + \overline{F} + H)$

Solutions

1. Les deux théorèmes sont :
   $(X+a).(X+b) = X+ab$ ET $(X+a).(X+\overline{a}) = X$

$$
\begin{aligned}
f_1(a,b) &= (X+a).(X+b).(X+\overline{a}+\overline{b}) \\
&= (X+ab).(X+\overline{a.b}) \\
&= X
\end{aligned} \tag{2}
$$

2. Considérons le théorème : $X(X+a) = X$
   Posons $X = a + \overline{a.b}(b+efg)$ et $a = a(b\overline{c} + ef\overline{g} + f\overline{a}b)$:

$$
\begin{aligned}
f_2(a,b,c,d,e,f,g) &= X(X+a) = X \\
&= a + (\overline{a}+\overline{b})(b+efg) \\
&= a + \overline{a}.(b+efg) + \overline{b}.(b+efg) \\
&= a + (b+efg) + \overline{b}.(b+efg) \\
&= a + b + efg + \overline{b}efg \\
&= a + b + efg
\end{aligned}
$$

3. Simplifier :

$$
\begin{aligned}
f_3(E,F,G) &= (E+F+\overline{G})(\overline{E}+\overline{F}+H) \\
&=_{Concensus} E\overline{F} + \underline{EH} + \underline{\overline{E}F} + \cancel{FH} + \overline{G}.\overline{E} + \overline{G}.\overline{F} + \overline{G}.H \\
&=_{Concensus} \underline{E\overline{F}} + EH + F\overline{E} + \underline{\overline{G}.\overline{E}} + \cancel{\overline{G}.\overline{F}} + \overline{G}.H \\
&=_{Concensus} E\overline{F} + \underline{EH} + F\overline{E} + \underline{\overline{G}.\overline{E}} + \cancel{\overline{G}.H} \\
&= E\overline{F} + EH + F\overline{E} + \overline{G}.\overline{E}
\end{aligned} \tag{3}
$$

1.2.2 Table de Karnaugh (3 pts)

Donner les équations simplifiées de g_1 et g_2 exprimées dans les tables de karnaught suivantes :

g_1(a,b,c,d,e)

de \ abc	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	0	0	1	1	0	0	1
01	0	0	0	0	0	1	1	1
11	0	0	0	0	0	1	1	1
10	1	0	0	1	1	0	0	1

Solution

g_1(a,b,c,d,e)

de \ abc	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	0	0	1	1	0	0	1
01	0	0	0	0	0	1	1	1
11	0	0	0	0	0	1	1	1
10	1	0	0	1	1	0	0	1

g_1(a,b,c,d,e)

de \ abc	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	0	0	1	1	0	0	1
01	0	0	0	0	0	1	1	1
11	0	0	0	0	0	1	1	1
10	1	0	0	1	1	0	0	1

g_1(a,b,c,d,e)

de \ abc	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	0	0	1	1	0	0	1
01	0	0	0	0	0	1	1	1
11	0	0	0	0	0	1	1	1
10	1	0	0	1	1	0	0	1

$$g_1 = \overline{c}.\overline{e} + a.\overline{b}.\overline{c} + a.c.e$$

g_2(a,b,c,d,e)

de \ abc	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	0	0	0	0	0	0	1
01	1	0	0	0	0	0	0	1
11	0	1	1	1	1	1	1	0
10	1	0	0	0	0	0	0	1

Solution

g_1(a,b,c,d,e)

de \ abc	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	0	0	0	0	0	0	1
01	1	0	0	0	0	0	0	1
11	0	1	1	1	1	1	1	0
10	1	0	0	0	0	0	0	1

g_1(a,b,c,d,e)

de \ abc	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	0	0	0	0	0	0	1
01	1	0	0	0	0	0	0	1
11	0	1	1	1	1	1	1	0
10	1	0	0	0	0	0	0	1

g_1(a,b,c,d,e)

de \ abc	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	0	0	0	0	0	0	1
01	1	0	0	0	0	0	0	1
11	0	1	1	1	1	1	1	0
10	1	0	0	0	0	0	0	1

$$g_2 = \overline{b}.\overline{c}.\overline{d} + cde + bde + \overline{b}.\overline{c}.\overline{e}$$

1.3 Problème combinatoire (4.5 points)

Un robot se déplace dans un labyrinthe composé d'une aire de départ et d'un endroit cible à atteindre. Ce robot dispose de deux chenilles commandées par des actionneurs : MD (Moteur Droit), MG (Moteur Gauche). Un virage à droite (resp. à gauche) se fait par une action sur MG (resp. MD).

Un demi-tour peut être effectué en inversant un des deux moteurs, ce qui est réalisé par l'intermédiaire de l'actionneur DT : deux combinaisons sont possibles pour effectuer un demi-tour : $DT = 1, MG = 1, MD = 0$ (demi-tour par la droite) ou $DT = 1, MG = 0, MD = 1$ (demi-tour) par la gauche[1].

Le but du robot est d'atteindre un endroit prédéterminé du labyrinthe dans lequel il recevra alors une information binaire, la valeur logique 1, sur le capteur T.

De plus, le robot contient trois capteurs de type ultra-son, permettant de détecter la présence ou l'absence de mur en face, à gauche et à droite : AV, G, D. Une électronique dédiée, permet à ces capteurs de délivrer au robot une information binaire : 1 = présence de mur, 0 = absence de mur.

L'algorithme de déplacement est le suivant :

```
tant que L'endroit pré-déterminé n'est pas trouvé faire
|  si Il est possible de Tourner à droite alors
|  |  Tourner à droite;
|  |  sinon
|  |  |  si Il est possible d'Aller tout droit alors
|  |  |  |  Aller tout droit;
|  |  |  fin
|  |  |  sinon
|  |  |  |  si Il est possible de tourner à gauche alors
|  |  |  |  |  Tourner à Gauche;
|  |  |  |  fin
|  |  |  |  sinon
|  |  |  |  |  Faire demi-tour ;
|  |  |  |  fin
|  |  |  fin
|  |  fin
|  fin
fin
```

1. Faire le bilan des entrées sorties ;
2. Donner les équations permettant de réaliser la logique de commande. Réaliser cette commande en $NAND$.

Solution : Si demi-tour à droite :

1. L'actionneur DT inverse le moteur dont l'actionneur est à zéro, et l'on a un virage de type char

T	AV	G	D	MD	MG	DT	
0	0	0	0	0	1	0	A droite
0	0	0	1	1	1	0	Tout droit
0	0	1	0	0	1	0	A droite
0	0	1	1	1	1	0	Tout droit
0	1	0	0	0	1	0	A droite
0	1	0	1	1	0	0	A gauche
0	1	1	0	0	1	0	A droite
0	1	1	1	0	1	1	demi-tour droite
1	*	*	*	0	0	0	Arret

MD(G,D,T,aV)

T Av \ G D	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	0	1	1	0
0 1	0	1	0	0
1 1	0	0	0	0
1 0	0	0	0	0

$$MD = D.\overline{Av}.\overline{T} + \overline{G}.D.\overline{T}$$

MG(G,D,T,aV)

T Av \ G D	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	1	1	1
0 1	1	0	1	1
1 1	0	0	0	0
1 0	0	0	0	0

$$MG = \overline{Av}.\overline{T} + \overline{D}.\overline{T} + \overline{T}.G$$

$$DT = Av.G.D.\overline{T}$$

Si demi-tour à gauche :

T	AV	G	D	MD	MG	DT	
0	0	0	0	0	1	0	A droite
0	0	0	1	1	1	0	Tout droit
0	0	1	0	0	1	0	A droite
0	0	1	1	1	1	0	Tout droit
0	1	0	0	0	1	0	A droite
0	1	0	1	1	0	0	A gauche
0	1	1	0	0	1	0	A droite
0	1	1	1	1	0	1	demi-tour gauche
1	*	*	*	0	0	0	Arret

MD(G,D,T,aV)

T Av \ G D	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	0	1	1	0
0 1	0	1	1	0
1 1	0	0	0	0
1 0	0	0	0	0

$$MD = D.\overline{T}$$

MG(G,D,T,aV)

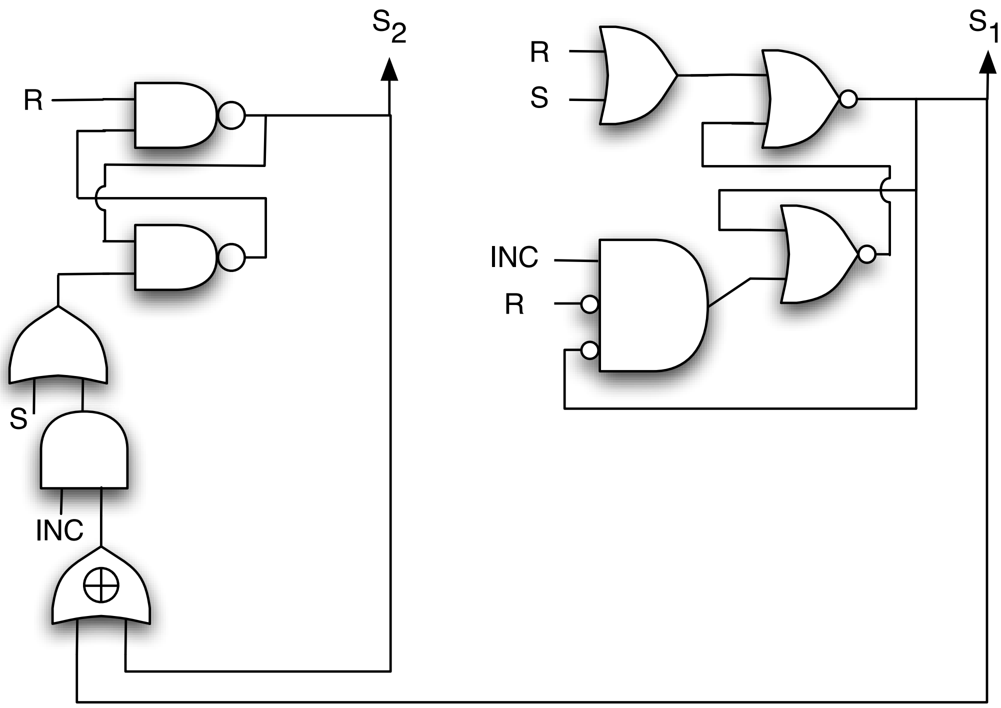
T Av \ G D	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	1	1	1
0 1	1	0	0	1
1 1	0	0	0	0
1 0	0	0	0	0

$$MG = \overline{Av}.\overline{T} + \overline{D}.\overline{T}$$

$$DT = Av.G.D\overline{T}$$

2 Logique séquentielle (8.5 pts)

Analyser le circuit suivant.



Convention de notation :

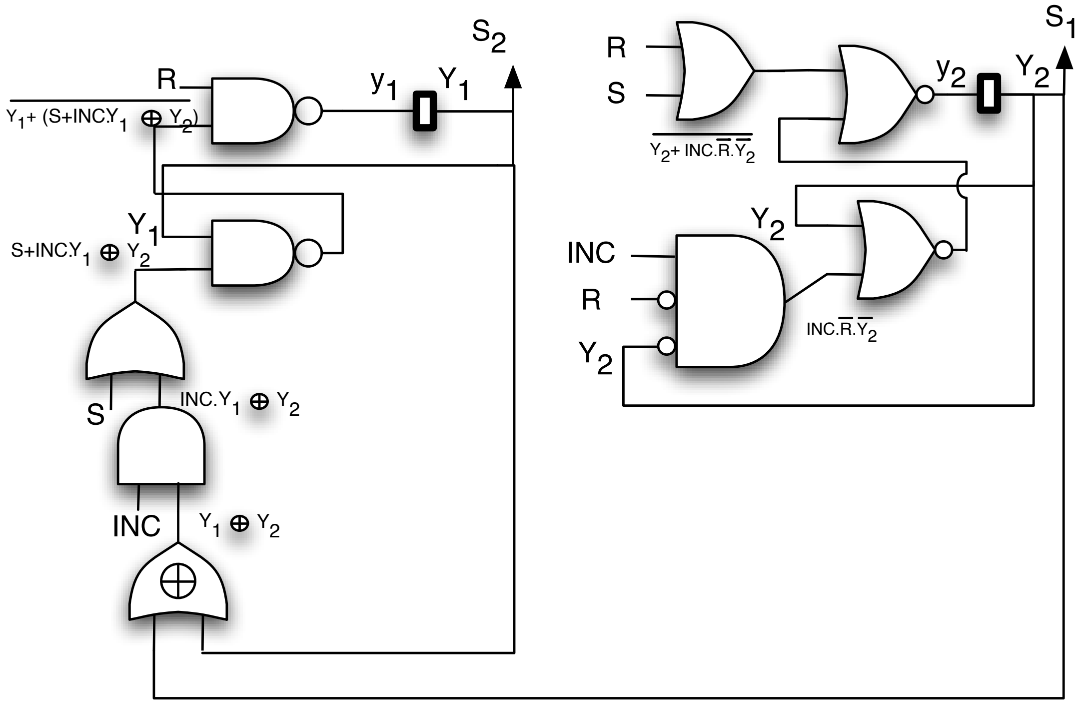
- $Y_0, Y_2, ...Y_i$: les indices croissent lorsque l'on identifie un rebouclage de haut en bas puis de gauche à droite.
- De plus, on nommera les états stables de $q_0, q_1, ...q_i$ (avec la convention utilisée pour les Y_i)

Solution : Il y a 2 rebouclages et donc 2 variables internes Y_1 et Y_2.

Equations

$$\begin{cases} y_1 = \overline{(R.\overline{Y_1.(S + INC.Y_1 \bigoplus Y_2)}} \\ y_2 = \overline{(R+S) + \overline{(Y_2 + INC.\overline{R}.\overline{Y_2})}} \\ S_2 = Y_1 \\ S_1 = Y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \overline{R} + (Y_1.(S + INC.Y_1 \bigoplus Y_2)) \\ y_2 = \overline{(R+S)}.(Y_2 + INC.\overline{R}.\overline{Y_2}) \\ S_2 = Y_1 \\ S_1 = Y_2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y_1 = \overline{R} + (Y_1.S + Y_1.INC.(Y_1\overline{Y_2} + \overline{Y_1}.Y_2)) \\ y_2 = \overline{(R+S)}.(Y_2 + INC.\overline{R}.\overline{Y_2}) \\ S_2 = Y_1 \\ S_1 = Y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \overline{R} + Y_1.S + Y_1.INC.\overline{Y_2} \\ y_2 = \overline{R}.\overline{S}.(Y_2 + INC.\overline{R}) = \overline{R}.\overline{S}.(Y_2 + INC) \\ S_2 = Y_1 \\ S_1 = Y_2 \end{cases}$$

g_2(R,S,INC,Y_1,Y_2)

Y_1Y_2 \ $R\ S\ INC$	000	001	011	010	100	101	111	110
00	10	11	10	10	00	00	00	00
01	11	11	10	10	00	00	00	00
11	11	11	10	10	10	10	00	00
10	10	11	10	10	10	10	10	00

Tables d'excitation et des états nommés

g_2(R,S,INC,Y_1,Y_2)

Y_1Y_2 \ $R\ S\ INC$	0 0 0	0 0 1	0 1 1	0 1 0	1 0 0	1 0 1	1 1 1	1 1 0
0 0	q_0	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}
0 1	q_1	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_8	q_9
1 1	q_2	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}
1 0	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}

Machine de Moore : Les sorties S_1 et S_2 relative à chaque état sont représentées sous forme d'exposant dans l'état.