

# Travaux Dirigés de Logique

D. Delfieu

January 12, 2026

## 1 NUMERATION

$$\begin{aligned} 2^{-1} &= 0,5 & 2^{-2} &= 0,25 & 2^{-3} &= 0,125 & 2^{-4} &= 0,6125 \\ 2^{-5} &= 0,03125 & 2^{-6} &= 0,015625 & 2^{-7} &= 0,0078125 & 2^{-8} &= 0,00390625. \end{aligned}$$

### 1.1 Conversions

**Base 2 ?** Trouver les équivalents décimaux de 1000, dans les bases  $B = 8, 3, 2$ .

Comparer le nombre de chiffres nécessaires pour exprimer un nombre  $N$  quelconque dans les systèmes binaires et octal.

**Vers une base Octale** Calculer l'équivalent octal de 1971.

**Vers base Décimale** Trouver l'équivalent décimal de  $(44)_8$

**Conversion en base 2** Convertir dans le système binaire le nombres suivant :  $(228, 375)_{10}$

**Binaire** Effectuer les opérations suivantes :

$$(0101011)_2 + (0111011)_2 =$$

$$(7FE)_{16} + (3AB)_{16} =$$

$$(4B9)_{16} + (FFF)_{16} =$$

### 1.2 Représentation des nombres négatifs

#### 1.2.1 $CA_1$

En utilisant le  $CA_1$ , toujours avec 6 e.b., donner les expressions binaires des nombres suivants :  $-24, -15, -12$

#### 1.2.2 $CA_2$

Combien faut-il d' e.b. pour réaliser les opérations suivantes :  $15 - 3, -12 - 4$

Effectuer ces opérations en complément restreint.

### 1.2.3 Complément Vrai et débordements

Avec les nombres signés sur 9 e.b., en utilisant le complément vrai pour la représentation des nombres négatifs, faire les opérations suivantes :

$$232 - 25, 232 + 25, -232 + 25, -232 - 25$$

Détecter les éventuels débordements, en déduire un circuit de détection.

## 2 Logique combinatoire

### 2.1 Portes élémentaires

Théorèmes de base

- $1 + x =$
- $0 + x =$
- $1.x =$
- $0.x =$
- $1 \oplus x =$
- $0 \oplus x =$
- $0 \otimes x =$
- $1 \otimes x =$

*Opérateur Logique Complet*

- Montrer que *Nand* et *Nor* sont des *Opérateurs Logiques Complets*
- Représenter la fonction  $f$  en utilisant exclusivement des *Nand* (avec éventuellement plus eux entrées)

$$F(a, b, c, d) = a.\bar{d} + a.e + b.\bar{d} + b.e$$

- Factoriser la fonction, puis représenter la fonction  $f$  en utilisant exclusivement des *Nor* (avec éventuellement plus deux entrées)

**Ou et Et exclusifs :** Donner la définition du *ou exclusif* ( $\oplus$ ) en portes et, ou not. Quelle est la relation entre  $\oplus$  et  $\ominus$

## 2.2 Karnaugh

Construire les tables de Karnaugh des fonctions logiques définies par les tables de vérité suivantes, puis les utiliser pour simplifier les expressions  $F_1$  et  $F_2$  :

a	b	c	d	$F_2$	A	B	C	$F_1$
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1				
1	0	0	1	0				
1	0	1	0	0				
1	0	1	1	0				
1	1	0	0	0				
1	1	0	1	1				
1	1	1	0	0				
1	1	1	1	1				

Donner les expressions logiques les plus simples possibles des fonctions définies par les *Table de Karnaugh* suivantes :

$f$

The diagram shows a 4x8 grid. The height is labeled  $a$  and the width is labeled  $e$ . The grid is partitioned by a vertical line at column 4 and a horizontal line at row 3. The top-left 3x3 area is labeled  $b$ . The top-right 3x4 area is labeled  $c$ . The bottom-left 1x4 area is labeled  $d$ . The bottom-right 1x4 area is labeled  $d$ . Below the grid is a 4x4 grid with height  $a$  and width  $b$ .

0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0

1	0	0	1
1	1	0	1

$f(a,b,c,d)$

The diagram shows a 4x4 grid. The height is labeled  $c$  and the width is labeled  $a$ . The grid is partitioned by a vertical line at column 2 and a horizontal line at row 3. The top-left 3x1 area is labeled  $d$ . The top-right 3x3 area is labeled  $b$ . The bottom-left 1x1 area is labeled  $c$ . The bottom-right 1x3 area is labeled  $d$ . Below the grid is a 4x4 grid with height  $c$  and width  $a$ .

1	1	1	1
0	1	1	0
0	1	1	0
0	1	0	0

1	0	0	1
1	1	0	1

### 2.2.1 Lecture de table sur les zéros

On considère la fonction logique  $F(a, b, c, d)$  définie par le tableau de Karnaugh suivant :

$f(a,b,c,d)$

		a			
		b			
c \ d	a \ b	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0		1	0	1	1
0 1		0	0	1	1
1 1		0	1	1	0
1 0		0	1	1	0

- Donner son expression sous la forme d'une somme de produits (à partir des "1" du tableau)
- Donner son expression sous la forme d'un produit de sommes (à partir des "0" du tableau puis par complémentation).

## 2.3 Démonstrations algébriques

### 2.3.1 Egalités logiques et simplifications

**Démontrer** les égalités logiques suivantes :

1.  $a + \bar{a}b = a + b$
2.  $(\bar{a} + b)(a + c) = a.b + \bar{a}c$
3.  $(a + \bar{b})(b + \bar{c})(c + \bar{a}) = (\bar{a} + b)(\bar{b} + c)(\bar{c} + a)$

**Calculer** la fonction complémentaire de la fonction suivante :

$$F_1 = a.(\bar{b} + c + d) + \bar{c}d$$

**Simplifier** les expressions logiques suivantes :

$$F_1 = a.b + \bar{c} + c.(\bar{a} + \bar{b})$$

$$F_2 = (a + b + c)(a + \bar{b} + c)(a + \bar{b} + \bar{c})$$

$$F_3 = (a + b)(a + c) + (b + c)(b + a) + (c + a)(c + b)$$

### 2.3.2 Simplification d'expressions logiques : comparaison de méthodes

Obtenir une expression plus simple des fonctions logiques suivantes, soit par le calcul booléen, soit en construisant leur tables de karnaugh :

$$F_1(a, b, c) = ab\bar{c} + abc + a\bar{c} + \bar{a}bc + \bar{b}c$$

$$F_2(a, b, c, d) = \bar{a}d + bc + acbd + ab\bar{c}\bar{d}$$

$$F_3(a, b, c) = (a + b)(a + c) + (b + c)(b + a) + (c + a)(c + b)$$

## 2.4 Exercices

### 2.4.1 Serrure de coffre

Quatre responsables d'une société ( $A, B, C, D$ ) peuvent avoir accès à un coffre. Ils possèdent chacun une clé différente ( $a, b, c, d$ ) et il a été convenu que :

- $A$  ne peut ouvrir le coffre que si au moins un des responsables  $B$  ou  $C$  est présent.
- $B, C, D$  ne peuvent l'ouvrir que si au moins deux des autres responsables sont présents.

Donner l'équation logique de la serrure du coffre ( $S$ ) en fonction de  $a, b, c, d$ .

### 2.4.2 Amplification sonore

Les trois haut-parleurs d'une salle de cinéma (soient  $a, b, c$ ) sont branchés sur un amplificateur qui a deux sorties : une d'impédance  $4 \Omega$  (soit  $S_4$ ) et une autre d'impédance  $8 \Omega$  (soit  $S_8$ ).

- Lorsqu'un seul haut-parleur est utilisé, il doit être relié à la sortie de  $8 \Omega$ .
- Lorsque deux haut-parleurs sont utilisés, ils doivent être reliés tous les deux à la sortie de  $S_4 \Omega$ .
- Le fonctionnement simultané des trois haut-parleurs est interdit.

Donner les équations logiques des sorties  $S_4$  et  $S_8$  en fonction de  $a, b, c$ .

### 2.4.3 Circuit de vote

Quatre délégués syndicaux représentent respectivement le nombre de voix suivants :

- $a = 100$  voix,
- $b = 150$  voix,
- $c = 250$  voix,
- $d = 175$  voix.

Pour être acceptée lors des réunions, une proposition doit recueillir au moins 50 % des voix représentées.

Donner l'équation logique d'un circuit  $S$  à 4 entrées  $a, b, c, d$  dont la valeur logique soit "1" lorsqu'une proposition est acceptée "0" lorsqu'elle est refusée.

### 2.4.4 Deviner un nombre

Un système devine la valeur d'un nombre compris entre 0 et 7 d'après les réponses à 3 questions :

- Le chiffre est-il impair ? Oui  $A = 1$  Non  $A = 0$
- La valeur de  $2 * (N + 1) > 8$  Oui  $B = 1$  Non  $B = 0$
- Le reste de la division de  $(N + 10)/4$  est-il égal à 1 ou 2 OUI  $C = 1$  NON  $C = 0$

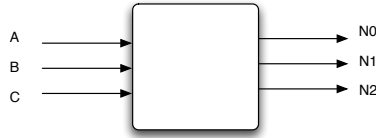


Figure 1: système qui devine un nombre

## 2.5 Problèmes

### 2.5.1 Décodeur

On souhaite réaliser un comparateur de deux nombres  $A$  et  $B$  codés en binaire. Soient  $A_0$  et  $A_1$  les bits du nombre  $A$ , et  $B_0$  et  $B_1$  les bits du nombre  $B$  (0 est l'indice de poids faible). Le comparateur aura 3 sorties  $SG$ ,  $SE$  et  $SP$  telles que :

- $SG = 1$  si  $A > B$
- $SE = 1$  si  $A = B$
- $SP = 1$  si  $A < B$

Etudier la réalisation de ce comparateur à partir d'un décodeur 4 entrées 16 sorties :

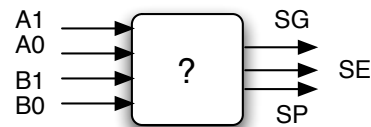


Figure 2:  $A_1, B_1$  bits de poids fort

### 2.5.2 Multiplexeur

On considère la fonction suivante :

$$F_2 = \bar{a}cd + b\bar{c} \cdot (e + a\bar{f}) + d\bar{f} \cdot (\bar{a}e + \bar{e}a) + a\bar{b}\bar{c} \bar{e}f$$

Matérialiser la fonction  $F$  à l'aide d'un multiplexeur 16 entrées et 4 entrées d'adresses :

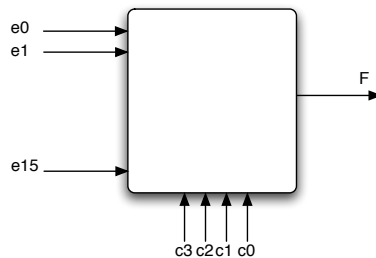


Figure 3:  $e_{15}, c_3$  bits de poids fort

### 2.5.3 Multiplication combinatoire 2\*2 bits

- Un chiffre A est codé en binaire sous la forme de 2 bits  $A_1$  et  $A_0$  ( $A_0$  poids faible)
- Idem pour un second chiffre B codé en binaire sous la forme de 2 bits  $B_1$  et  $B_0$  ( $B_0$  poids faible)
- On souhaite visualiser le résultat  $A * B = C$  codé en binaire sur 4 bits  $C_3, C_2, C_1$  et  $C_0$
- Chercher les équations de  $C_3, C_2, C_1$  et  $C_0$
- Simplifier les équations de  $C_3, C_2, C_1$  et  $C_0$
- Proposer un schéma avec cellules *NAND* deux entrées pour  $C_2$  et  $C_3$ .

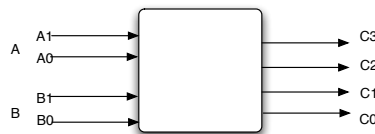
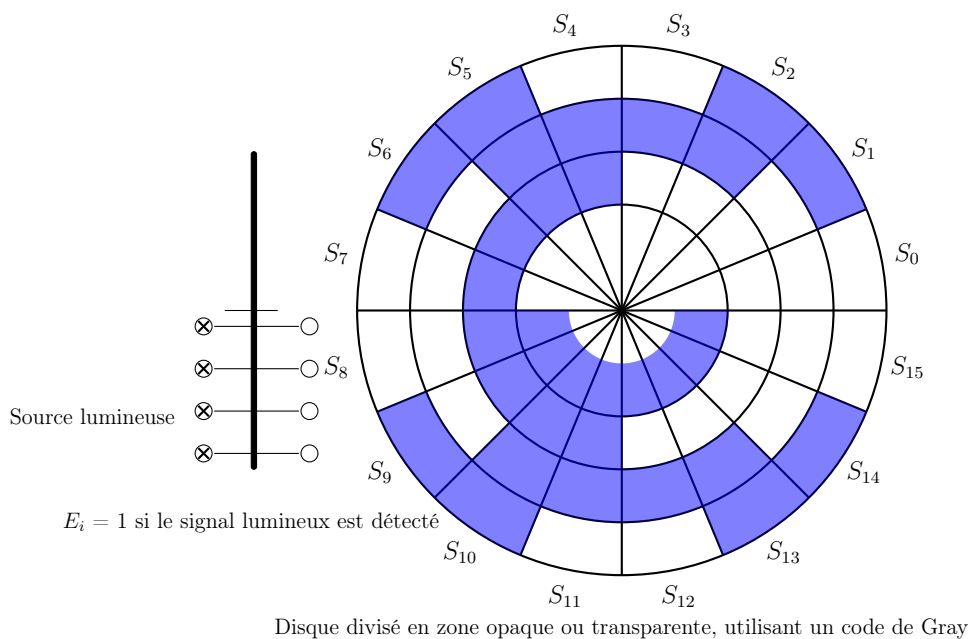


Figure 4: Multiplieur 2\*2

### 2.5.4 Codeur optique



Un codeur optique est composé d'un disque à secteur opaques et transparent et de 4 photo-détecteurs. On dispose de 4 informations ( $E_3, E_2, E_1, E_0$ ). Le secteur annulaire le plus éloigné du centre est  $E_0$ . Réaliser un dispositif fournissant l'information de position en code BCD (Décimal Codé binaire).

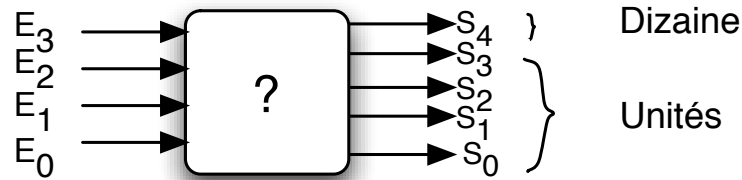


Figure 5:  $E_3$  et  $S_4$  sont les poids Forts

**Exemple** Pour la position de secteur  $S_{11}$  on a :  $E_3 = 1, E_2 = 1, E_1 = 1, E_0 = 0$ .  
Et le code DCB correspondant est  $S_4 = 1, S_3 = 0, S_2 = 0, S_1 = 0, S_0 = 1$

En effet  $S_0, S_1, S_2, S_3$  code les unités et  $S_4$  la dizaine.

1. Tracer les schémas de  $S_1, S_2, S_3, S_4$  avec des portes *NAND* à deux entrées
2.  $S_0$  sera matérialisé par un multiplexeur  $8 \rightarrow 1$  (le 74151) avec  $E_2, E_1, E_0$  pour les entrées d'adresses.

Tables :

<i>Pos</i>	$E_3$	$E_2$	$E_1$	$E_0$	$S_4$	$S_3$	$S_2$	$S_1$	$S_0$
0									
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									
11	1	1	1	0	1	0	0	0	1
12									
13									
14									
15									

Tables de Karnaugh :

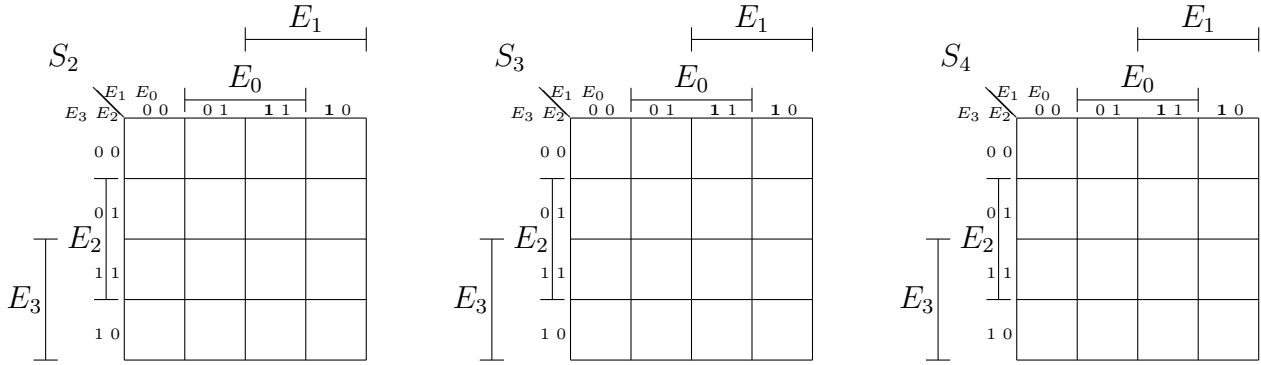
$S_0$

		$E_1$					
		$E_0$					
$E_3$	$E_2$	$E_1$	$E_0$	0 0	0 1	1 1	1 0
	0 0						
	0 1						
	1 1						
	1 0						

$S_1$

		$E_1$					
		$E_0$					
$E_3$	$E_2$	$E_1$	$E_0$	0 0	0 1	1 1	1 0
	0 0						
	0 1						
	1 1						
	1 0						





### 2.5.5 L'afficheur 7-segments

L'afficheur 7-segments *TIL 302* est un circuit intégré formé de 7 diodes lumineuses en forme de bâtonnets permettant de représenter tout chiffre (0, ..., 9) sous la forme suivante : On appelle  $K_a, \dots, K_g$



Figure 6: Forme des chiffres

les fonctions d'allumage des segments  $a, \dots, g$ . Notez que la mise à la masse de  $K_a$  c.a.d.  $K_a = 0$  permet d'allumer le segment  $a$ . L'allumage d'un segment se fait par mise à zéro de la cathode  $K$  qui joue le

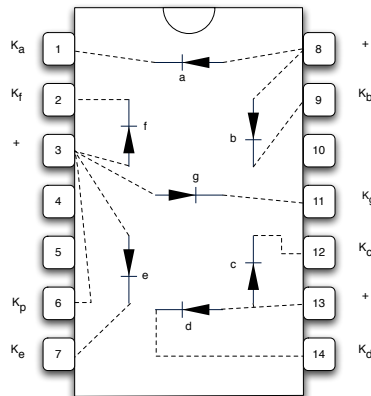


Figure 7: Le composant TIL 302

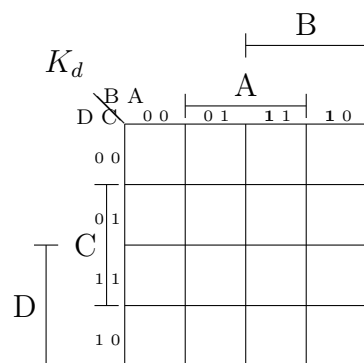
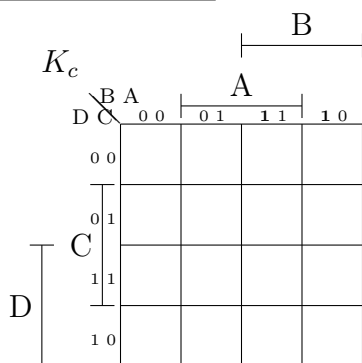
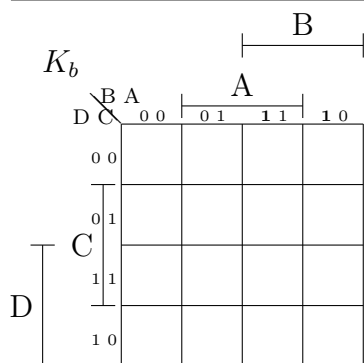
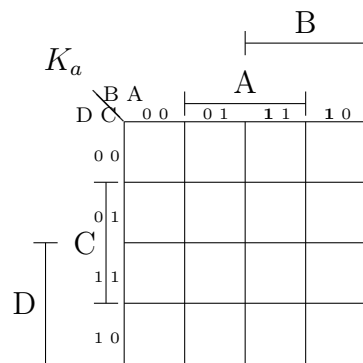
rôle d'entrée, l'anode (+) étant à  $+5v$ .

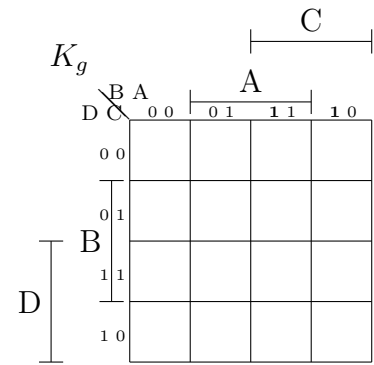
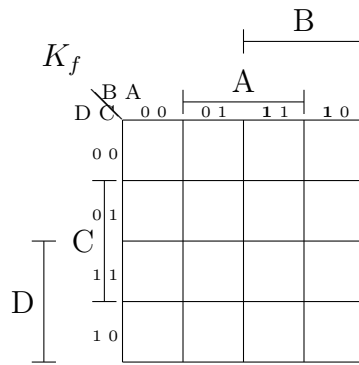
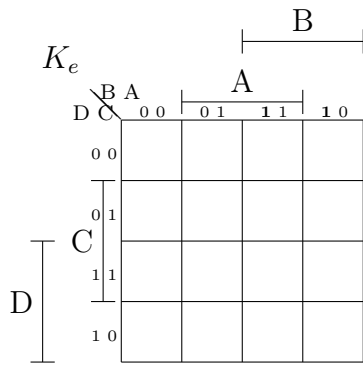
En fonction d'un nombre exprimé sur les entrées  $A, B, C, D$ , exprimer les équations de  $K_a, \dots, K_q$ .

<i>Entres</i>	<i>Fonction</i>
1	cathode a
2	cathode f
3	+ 5v
6	cathode du point
7	cathode e
8	cathode d
9	+ 5v
10	cathode c
11	cathode g
13	cathode b
14	+ 5v

Ecrire la table de vérité des fonctions, simplifier à l'aide des tables de Karnaugh, puis dessiner le logigramme du circuit en utilisant des portes *ET – NON*.

<i>Nombre</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
0	0	0	0	0							
1	0	0	0	1							
2	0	0	1	0							
3	0	0	1	1							
4	0	1	0	0							
5	0	1	0	1							
6	0	1	1	0							
7	0	1	1	1							
8	1	0	0	0							
9	1	0	0	1							
10	1	0	1	0							
11	1	0	1	1							
12	1	1	0	0							
13	1	1	0	1							
14	1	1	1	0							
15	1	1	1	1							

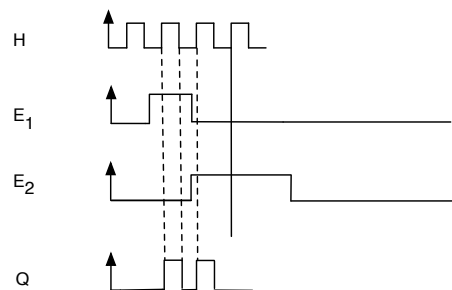
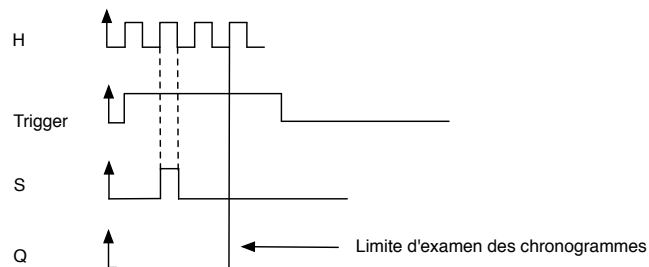




### 3 Logique Séquentielle

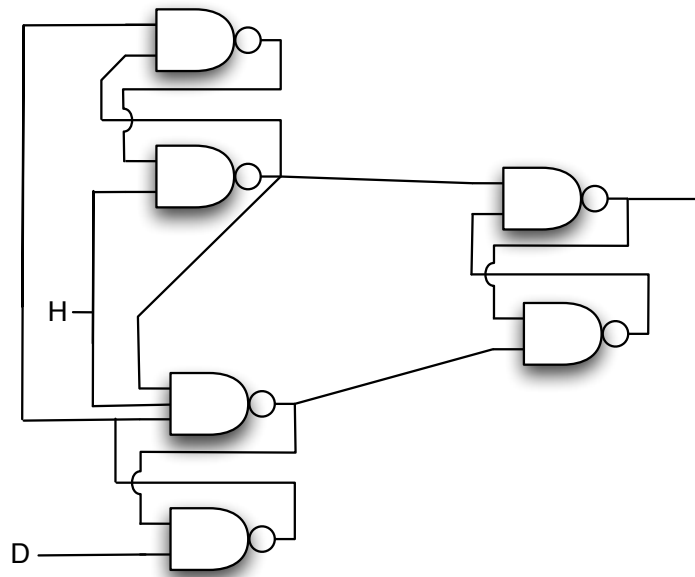
#### 3.1 système séquentiel ou combinatoire ?

Les systèmes dont les entrées-sorties sont représentées par les chronogrammes suivant sont-ils séquentiel ou combinatoire ?



## 3.2 Analyse de circuits séquentiels

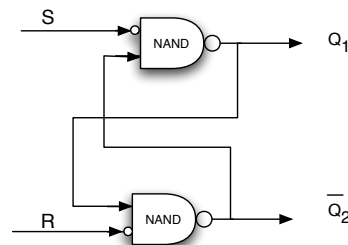
A partir du schéma, donner la machine de Moore explicitant le fonctionnement.



## 3.3 Les bascules

### 3.3.1 La bascule $RS$

Considérons la bascule  $RS$  asynchrone suivante :

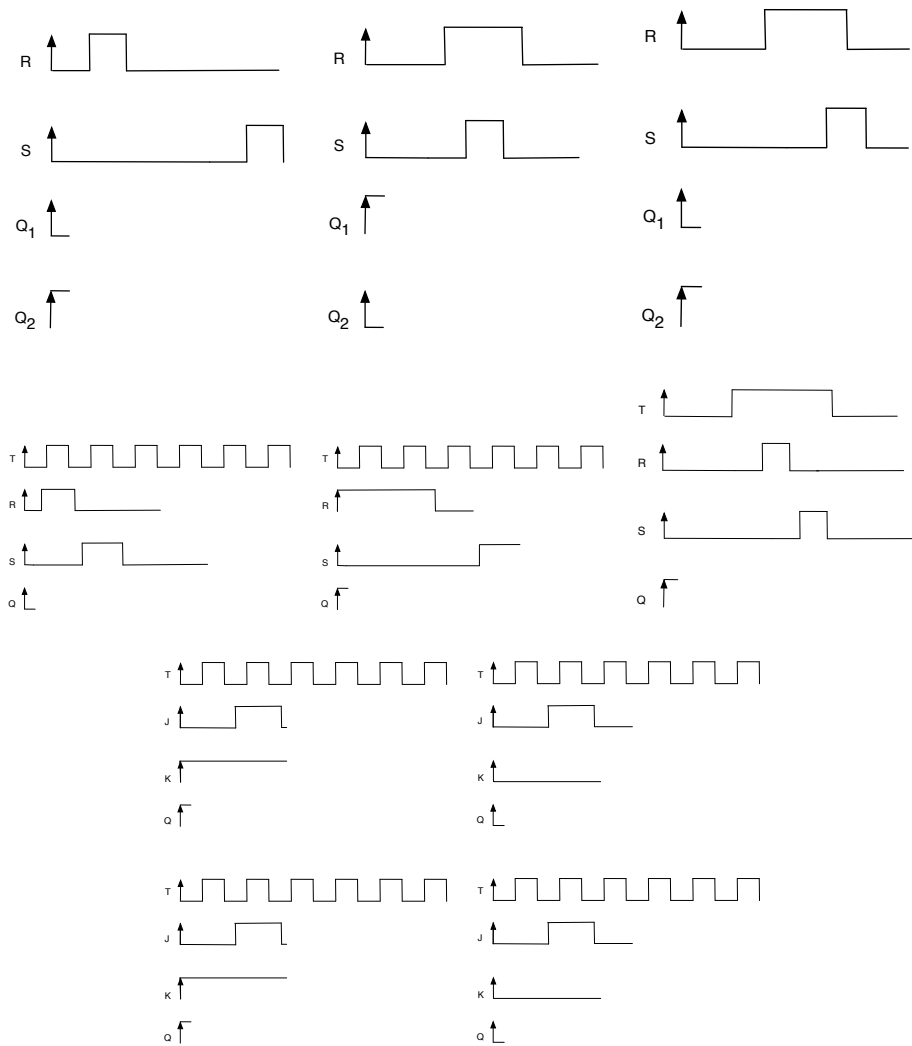


**Bascule  $RS$**  Donner dans les cas suivant les chronogrammes des sorties  $Q_1$  et  $Q_2$ :

**Bascule  $RST$**  Donner dans les cas suivant les chronogrammes de la sortie  $Q$ :

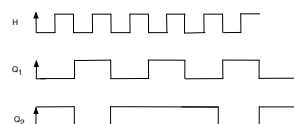
**Bascule  $JK$  synchronisée sur front montant** Donner dans les cas suivant les chronogrammes de la sortie  $Q$ :

**Bascule Maître-Esclave** Donner dans les cas suivant les chronogrammes de la sortie  $Q$ :



### 3.4 Les séquenceurs

Réaliser le séquenceur correspondant au chronogramme suivant :



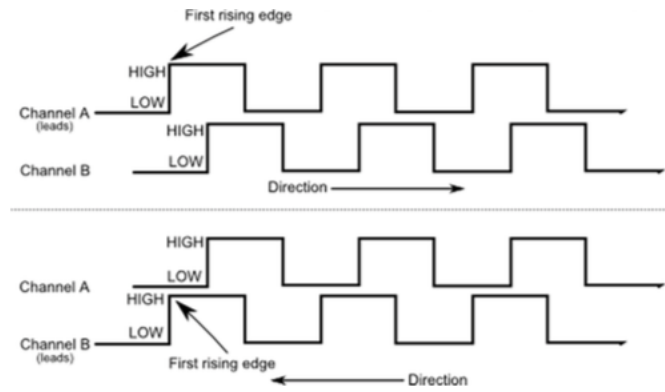
#### 3.4.1 Les Compteurs/Décompteurs

Réaliser le séquenceur correspondant à la séquence : 1, 2, 4, 15, 11, 13, 3, 0, 1, ...

#### 3.4.2 Le Club Alpin Français

Une enseigne publicitaire pour le "Club Alpin Français" doit afficher successivement sur un afficheur 7-segments les lettres C, A et F. Proposer un schéma en JK.

### 3.4.3 Encodeur Quadratique



Un système comporte 2 entrées  $A$  et  $B$ , une sortie Direction. A l'aide de deux bascules JK réaliser un encodeur quadratique : Il donne le sens en fonction de la succession de séquences d'états.