Mathématiques

Semestre 1

Examen — Première session — jeudi 10 janvier 2013
durée : 1 heure 30
Appareils électroniques et documents interdits.
Les réponses doivent être justifiées, et les calculs doivent figurer sur la copie.
Montrez ce que vous avez appris !

Question de cours (3 points). Pour un endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension finie, donner trois conditions équivalentes traduisant que f est diagonalisable.

Exercice (5 points). Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soient f, g deux endomorphismes non nuls de E qui vérifient les relations suivantes :

$$f \circ g = g \circ f = 0 \quad \text{et} \quad f + g = \mathrm{id}_E.$$

On notera F l'image de f et G l'image de g.

(1) Comparer f et $f \circ f$.

(2) Identifier la nature géométrique de f et g et montrer que : $E = F \oplus G$.

(3) Soient α, β et γ trois scalaires. Montrer que $\alpha f + \beta g + \gamma \mathrm{id}_E$ est diagonalisable, et en donner le spectre.

Problème (12 points). Cet exercice vous propose de diagonaliser une matrice sans calculer son polynôme caractéristique. On note I_4 la matrice identité de taille 4×4. Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.

(2) Donner, sans calcul, la somme des quatre racines du polynôme caractéristique de A.

(3) Quel est la dimension de $\mathrm{Ker}(A + I_4)$?

(4) Diagonaliser A.

Plus généralement, soient a, b et c trois réels, et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice, dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4), est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix}.$$

(5) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
On ne demande pas ici de calculer son polynôme caractéristique.

(6) Calculer la somme des colonnes de M et en déduire un vecteur propre de f, dont on précisera la valeur propre associée.

(7) Justifier que l'orthogonal d'une droite propre de f est stable par f.

(8) Déduire des questions précédentes qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$, formée de vecteurs propres de f, et dont les trois derniers vecteurs ont des coordonnées de somme nulle.

(9) Calculer la somme alternée des colonnes de M et en déduire un autre vecteur propre de f, dont on précisera la valeur propre associée.

(10) Expliciter, grâce à deux autres essais judicieux, une base de vecteurs propres pour f.
On précisera le spectre de f.

(HB) En déduire le déterminant de M comme produit de termes du premier degré en a, b, c.

Université de Nantes
Faculté des Sciences et Techniques **Année 2012-2013**

X3M0020 Analyse 2

Examen du janvier 2013. Durée : 2h00.

Sans document. Sans calculatrice.

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 t\ln(1+t)\,dt. \tag{1}$$

$$J = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \frac{1}{t^2+t+1}dt. \tag{2}$$

$$K = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^3 t}{1+\sin^2 t}\,dt. \tag{3}$$

(**Indication.** Pour le calcul de K, on vérifiera que $u = \sin t$ est un changement de variable de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$.)

Exercice 2. (a). Dessiner le domaine $D_1 = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq 2\}$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ et calculer l'intégrale double $\int\int_{D_1} e^{y^2} dxdy$.

(b). Soit $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ le domaine défini en coordonnées polaires par $\{(r, \theta); 0 \leq r \leq f(\theta),\ \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1\}$, où f est une fonction continue et non-négative sur $[\theta_0, \theta_1]$, $\theta_0 < \theta_1$.

(b1). Montrer que l'aire de D_2 est donnée par

$$\text{Aire}(D_2) = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta)^2 d\theta \tag{4}$$

(b2). Calculer l'aire de D_2 lorsque $f(\theta) = a(1+\sin\theta), \theta \in [0, 2\pi], a > 0$.

Exercice 3. Soit f et g deux fonctions réelles continues sur l'intervalle compact $[a, b]$, $b > a$. On suppose que $g(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$.

(a). Soit $G(x) = \int_a^x g(t)dt, x \in [a, b]$. Justifier que $G(b) > 0$ et que $x \to u(x) = a+G(x)(b-a)/G(b)$ est un changement de variable de $[a, b]$ sur $[a, b]$.

(b). Démontrer que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \frac{G(b)}{b-a}\int_a^b f(x(u))du,$$

où $x(u)$ est la fonction réciproque de $x \to u(x)$. En déduire qu'il existe $\eta \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x(\eta))G(b).$$

Exercice 4. Soit f et g deux fonctions réelles continues sur l'intervalle compact $[a,b]$, $b > a$, avec g *positive et décroissante* sur $[a,b]$. On se propose de démontrer la deuxième formule de la moyenne : $\exists c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx. \tag{5}$$

(1). Soit $F(x) = \int_a^x f(t)$, $x \in [a,b]$. On note

$$m = \min_{x\in[a,b]} F(x), \quad M = \max_{x\in[a,b]} F(x).$$

Soit $x_j = a + \frac{j(b-a)}{n}$, $j = 0, 1, \cdots, n$, $n \in N^*$. Montrer qu'il existe $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ tel que

$$F(x_j) - F(x_{j-1}) = f(\xi_j)\frac{b-a}{n}, \quad j = 1, \cdots, n.$$

Soit $S_n = \sum_{j=1}^n g(\xi_j)(F(x_j) - F(x_{j-1}))$. Justifier que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

(2). Vérifier que

$$S_n = \sum_{j=1}^{n-1}(g(\xi_j) - g(\xi_{j+1}))F(x_j) + g(\xi_n)F(x_n)$$

En déduire que

$$mg(\xi_1) \leq S_n \leq Mg(\xi_1), \quad \xi_1 \in [a, \frac{b-a}{n}].$$

(3). Montrer que

$$m \leq \frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq M.$$

En déduire la deuxième formule de la moyenne (5).

X. Saint Raymond

UE X3M0040 2012/13
Approximation de fonctions

Examen de première session

9 janvier 2013 — Durée 90 minutes

Le but de ce problème est de montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et de calculer des valeurs approchées de son intégrale généralisée, qui sera notée $\pi = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1+t^2}$. Le nombre π ne sera donc pas considéré ici comme connu, mais comme un nombre dont on cherche des valeurs approchées. Dans tout le problème, on notera aussi $a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, qui est un nombre réel vérifiant $0 < a < 1$.

Les deux parties du problème peuvent être traitées de façon indépendante.

Première partie

(1) Justifier que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est *localement intégrable* sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit $\varepsilon \in]0, a[$. On introduit le changement de variable $t = \varphi(s)$, où $\varphi(s) = \frac{1}{2}\,(s^{-1} - s)$.

(a) Trouver une relation entre les deux intégrales $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(\varepsilon)} \frac{dt}{1+t^2}$ et $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{a} \frac{ds}{1+s^2}$.

(b) Montrer que $\varphi(a) = a$ et calculer $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varphi(\varepsilon)$.

(3) (a) Justifier que $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{a} \frac{ds}{1+s^2} = \int_0^a \frac{dt}{1+t^2}$.

(b) Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et que son intégrale généralisée, notée π, vaut aussi $\pi = \displaystyle\int_0^a \frac{6\,dt}{1+t^2}$.

Deuxième partie

On considère ici la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-t^2)^k$.

(4) (a) Donner la définition d'une série de fonctions normalement convergente sur un intervalle I.

(b) Démontrer que la série donnée ci-dessus est normalement convergente sur $[0, a]$, et calculer sa somme.

(5) (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $I_k = \displaystyle\int_0^a t^{2k}\,dt$.

(b) Démontrer que l'intégrale $\pi = \displaystyle\int_0^a \frac{6\,dt}{1+t^2}$ vérifie aussi $\pi = 2\sqrt{3} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k(2k+1)}$.

(6) (a) Montrer que $\dfrac{4}{7} < \dfrac{1}{\sqrt{3}} < \dfrac{7}{12}$.

(b) En utilisant les trois premiers termes de la série de la question **(5)**(b), montrer que $\dfrac{16}{3\sqrt{3}} < \pi < \dfrac{82}{15\sqrt{3}}$, et en déduire un encadrement de π par deux rationnels.

(c) Combien de termes de cette série faudrait-il écrire pour en déduire un encadrement de π à 2×10^{-5} près ?

Question 1. *10 points*

Vous participez à l'étude du catabolisme du maltose chez une bactérie Gram-négative. Deux opérons, *malEFG* et *malKBM* sont impliqués dans la consommation du maltose chez cette bactérie. Ces opérons sont localisés l'un après l'autre dans le génome mais orientés dans des directions opposées. La transcription d'opéron *malKBM* peut être réalisée par deux facteurs sigma, σ70 (transcription des gènes de la croissance exponentielle) et σ28 (transcription des gènes du chimiotactisme).

La protéine transmembranaire MalB, codée par le gène *malB*, est responsable de la reconnaissance du maltose dans le milieu et aussi de son transport dans la cellule. Elle contient dans sa partie cytoplasmique un site de liaison d'ATP.

Note: le maltose est un disaccharide qui est clivé en deux molécules de glucose dans la cellule grâce à l'action de l'enzyme maltase.

Présentez schématiquement l'organisation de deux opérons sur l'ADN à doubles brins. Montrez les positions des promoteurs pour chaque opéron, le début et la fin des ARNm synthétisés et les protéines synthétisées. Notez les extrémités 5' et 3' des acides nucléiques sur vos schémas.

Comment expliquer l'initiation de la transcription d'opéron *malKBM* par deux facteurs sigma ? Faites vos commentaires.

Présentez schématiquement la localisation de la protéine MalB dans l'enveloppe de cette bactérie et expliquez le mécanisme du transport du maltose.

Quelle est la première étape dans le catabolisme de glucose dans la cellule bactérienne ?

Donnez les noms de trois voies du catabolisme du glucose chez les bactéries.

Quel est le rôle du catabolisme des sucres pendant la fermentation?

Question 2. *2 points*

Citez deux composants de la membrane externe chez les bactéries Gram-négatives et précisez leurs fonctions.

Question 3. *2 points*

A quoi sert l'ARN ribosomique dans la classification microbienne ? Pourquoi ?

Question 4. *3 points*

Citez deux virus qui provoquent des infections généralisées chez l'Homme.

Pour l'un de ces deux virus, expliquez comment le virus est transporté du site initial de l'infection, vers les organes où les symptômes se manifestent.

Question 5. *3 points*

Comment font des bactéries pathogènes pour nuire à l'hôte?

Pour *Streptococcus pneumoniae*, citez deux facteurs de virulence et précisez leurs fonctions. Comment fait-on pour prévenir les infections invasives provoquées par cette bactérie?

Université de Nantes
Faculté des Sciences et Techniques Année 2012-2013

X3M0060 Analyse et géométrie

Examen du janvier 2013. Durée : 2h00.

Sans document. Sans calculatrice.

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^3 t\ln t \, dt. \tag{1}$$

$$J = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \frac{1}{t^2+t+1} dt. \tag{2}$$

$$K = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^3 t}{1+\cos^2 t} \, dt. \tag{3}$$

(**Indication.** Pour le calcul de K, on vérifiera que $u = \sin t$ est un changement de variable de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$.)

Exercice 2. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, |x| \leq y\}$.

(1). Représenter graphiquement le domaine D dans le plan.

(2). En utilisant les coordonnées polaires, calculer l'intégrale double

$$K = \int\int_D \frac{y^2}{1+x^2+y^2} dxdy.$$

(3). Calculer le volume de $V = \{(x, y, z); (x, y) \in D, 0 \leq z \leq 1 + x^2 y\}$.

Exercice 3. Soit $P(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ pour $(x, y) \neq O = (0, 0)$. Pour $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, on note $\|a\|$ la norme euclidienne de a, $D(a, r)$ le disque fermé de centre a et de rayon r et $C_+(a, r)$ son bord orienté dans le sens direct. On pose

$$I(a, r) = \int_{C_+(a,r)} (P(x, y)dx + Q(x, y)dy)$$

Université de Nantes
Licence X3M0080

Département de Mathématiques
Année 2012/2013

Mathématiques pour l'informatique I
Examen du 9 janvier 2013

Durée : 1 heure 30

Documents interdits. Calculatrices interdites.

Il est vivement recommandé de ne pas répondre au hasard car des réponses fausses enlèvent des points. Il est fortement conseillé de justifier les réponses, car des réponses non justifiées rapportent moins de points.

Exercice A

On rappelle qu'on note $\mathbb{N}^*$ les entiers naturels strictement positifs. Soit g l'application de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ qui à (x, y) associe $(x \wedge y, x \vee y)$, c'est-à-dire le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple.

1. Donner la définition de «$f : A \to B$ *est injective*».
2. Donner la définition de «$f : A \to B$ *est surjective*».
3. Calculer $g \circ g$.
4. g est-elle injective ?
5. g est-elle surjective ?

Exercice B

Combien y a-t-il de façon de répartir 18 étudiants en un ensemble de petits groupes ainsi :

1. en un groupe de 9, un groupe de 6 et un groupe de 3 ?
2. en deux groupes de 9 ?
3. en trois groupes de 6 ?
4. en 9 binômes ?

Exercice C

Les nombres de Fibonaci sont définis par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Quel est le plus grand commun diviseur de F_{20} et F_{21} ?

Exercice D

Donner la décomposition en facteurs premiers du plus petit commun multiple des entiers de 1 à 30.

Exercice E

Quels sont les éléments de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ qui sont inversibles ?
Pour chacun d'eux, quel est son inverse ?

Exercice F

Quels sont les nombres compris entre 0 et 10^4, congrus à 60 modulo 63 et congrus à 29 modulo 64 ?

Exercice G

Que vaut 2012^{2012} modulo 11 ?

Semestre 2
Session 1

Université de Nantes
Département de Mathématiques

Partiel Probabilités discrètes
jeudi 16 mai 2013
durée 1H30

Documents et téléphones interdits, calculatrices autorisées

Cours — Soient X et Y deux variables discrètes indépendantes. Montrer que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 1 — Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes et soient y, a, b trois réels, où $y \neq 0$ et $y \neq 1$, tels que la loi du couple (X, Y) soit donnée par le tableau suivant :

$X \setminus Y$	y	0	1
0	1/4	a	1/4
1	1/6	b	1/6

1) Déterminer les lois respectives de X et Y.

2) Déterminer a et b de sorte que X et Y soient indépendantes.

3) On suppose que $a = \frac{1}{6}$. Quelle est la valeur de b ? Déterminer alors la valeur de y telle que la covariance de X et Y soit nulle. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 — Sur la chaîne de montage d'une usine d'automobiles, il y a en moyenne un incident machine par semaine, qui stoppe la production pour quelques heures. On suppose que le nombre d'incidents par semaine suit une loi de Poisson. Calculer la probabilité des événements suivants :

1) 4 incidents arrivent sur la chaine de montage cette semaine.

2) 5 incidents arrivent en tout pendant les 4 prochaines semaines

3) 5 incidents arrivent en tout pendant les 4 prochaines semaines, sachant que 4 se sont produits cette semaine.

Exercice 3 — On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est de $\frac{2}{3}$. Les lancers sont supposés indépendants, et on note X la variable aléatoire réelle égale aux nombres de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois consécutif deux piles. Pour $n \geq 1$, on pose : $p_n = P(X = n)$.

1) Déterminer p_2, p_3 et p_4.

2) Pour la suite on note r_n la probabilité qu'une suite de n lancers ne comporte pas deux piles consécutifs et se termine par pile, et s_n la probabilité qu'une suite de n lancers ne comporte pas deux piles consécutifs et se termine par face ($n \geq 2$)

a) Prouver que $p_{n+2} = \frac{4}{9} s_n$.
b) Montrer que $s_{n+1} = \frac{1}{3} s_n + \frac{1}{3} r_n$ et que $r_{n+1} = \frac{2}{3} s_n$.
c) En déduire $s_{n+2} = \frac{1}{3} s_{n+1} + \frac{2}{9} s_n$ puis $p_{n+2} = \frac{1}{3} p_{n+1} + \frac{2}{9} p_n$

3) Prouver par récurrence sur $n \geq 4$ que

$$p_n = (\frac{2}{3})^{n+1} - (\frac{-1}{3})^{n+1}.$$

4) Calculer $E(X)$. (on rappelle la formule $\sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ valable pour tout $q \in]-1, 1[$).

Université de Nantes | Département de Mathématiques
Licence X4M0070 | Année 2012/2013

Mathématiques pour l'informatique II
Examen du 16 mai 2013

Durée : 1 heure 30

Documents interdits. Calculatrices interdites.

Il est vivement recommandé de ne pas répondre au hasard car des réponses fausses enlèvent *des points. Il est fortement conseillé de justifier les réponses, car des réponses non justifiées rapportent moins de points.*

Exercice A

Pour chacune des questions suivantes, dire si la phrase écrite est vrai ou fausse.

1. $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$.
2. $\frac{1}{n} + \sqrt{n} + 2^n = O(n^2)$;
3. $2^n \ln(2) = O(n^2 \ln(n))$;
4. $n^{n^2} = o(2^{2^n})$;

Exercice B

Le but de l'exercice est de démontrer l'équivalence $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \ln(j) \sim \frac{1}{2} \ln(n)^2$.

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x} \ln(x)$, définie sur $]0, \infty[$, est décroissante sur $[e, \infty[$.
2. Comparer (avec la relation $\leq$) les trois nombres $f(j)$, $f(j-1)$ et $\int_{j-1}^{j} f(x)\, dx$.
3. Calculer un encadrement de $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \ln(j) - \int_1^n f(x)\, dx$
4. Calculer $\int_1^n f(x)\, dx$. *Indication :* calculer la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x)^2$.
5. Prouver que $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \ln(j) \sim \frac{1}{2} \ln(n)^2$.

Exercice C

Soit A la matrice tridiagonale (les coefficients qui ne sont pas marqués sont nuls) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 1 & 3 & 1 & & & \\ & 4 & 6 & 1 & & \\ & & 12 & 11 & 1 & \\ & & & 32 & 20 & 1 \\ & & & & 80 & 37 \end{bmatrix}$$

1. Calculer la décomposition LU.
2. Calculer le déterminant de A.
3. Soit b le vecteur (colonne) $(-1, -5, 10, -13, -18, -1)^T$. On cherche à résoudre le système $x^T A = b^T$. Comment faire ?
4. Calculer la solution x du système $x^T A = b^T$.

Exercice D

On considère le jeu extensif dont l'arbre est donné à la figure 1. Le nœud racine est au centre. Le joueur I joue donc en premier.

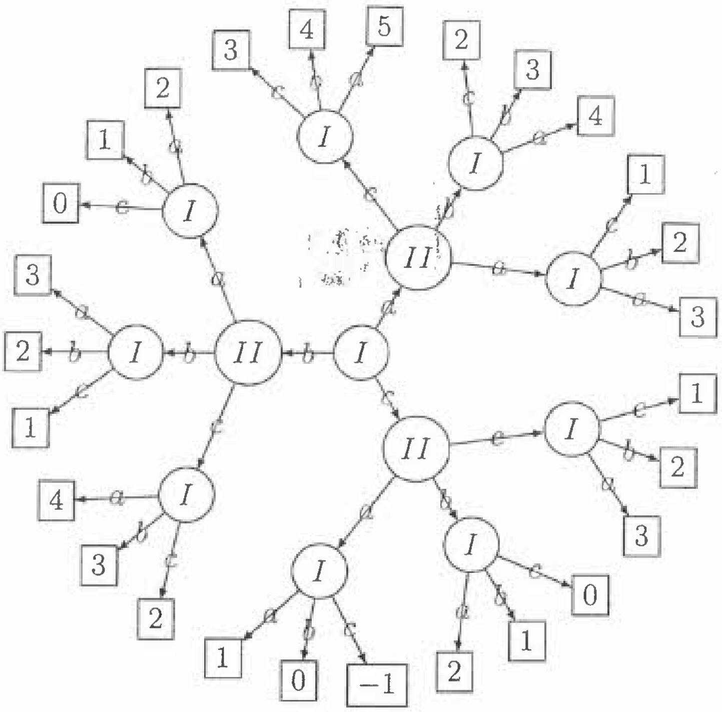


FIGURE 1 – Jeu extensif à somme nulle

1. Appliquer l'algorithme récursif du min-max pour déterminer les stratégies optimales de chaque joueur (le joueur I maximise, le joueur II minimise), en considérant que les enfants d'un nœud non terminal sont ordonnés dans l'ordre alphabétique de l'étiquette sur la branche qui y conduit. Cela veut dire que partant d'un nœud qui n'est pas une feuille, on explore en premier la branche a, puis la b puis la c.

   Combien d'appels récursifs ont lieu, c'est-à-dire combien de nœuds de l'arbre sont visités (combien de feuilles et combien de nœuds internes, y compris la racine) ?
2. Appliquer l'algorithme amélioré *αβ-pruning* en indiquant les coupures. Combien d'appels récursifs ont lieu ?

Exercice E

Voici la matrice d'un jeu sous forme normale à somme nulle :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Rappelons que le joueur I choisit une ligne et le joueur II choisit une colonne. Que si I choisit la ligne i et si II choisit la colonne j, alors le coefficient $A(i,j)$ de la matrice est le gain du joueur I. Que II perd ce que I gagne.

1. Calculer l'ensemble des meilleures réponses en strategies pures du joueur II selon que I joue la stratégie pure 1 ou la stratégie pure 2.
2. Quels sont les équilibres de Nash en stratégies pures ?
3. Pour chaque $\theta \in [0,1]$, calculer l'ensemble des meilleurs réponses en stratégies mixtes du joueur II face à la stratégie mixte s_θ du joueur I de paramètre θ, représentée comme le vecteur $(1-\theta, \theta)$ et qui signifie que le joueur I choisit au hasard la ligne 1 avec probabilité $1-\theta$ et la ligne 2 avec probabilité θ. *Indication :* dans un repère avec en abscisse θ variant de 0 à 1 et en ordonnées le gain du joueur I, tracer les graphes des 5 fonctions affines qui correspondent aux 5 stratégies pures du joueur II.
4. Quels sont les équilibres de Nash en stratégies mixtes ?

Université de Nantes
Faculté des Sciences et Techniques

Année 2012-2013

X4M0080 Séries et transformée de Fourier

Examen du 14 mai 2013. Durée : 1h30.

Sans document. Sans calculatrice.

Exercice 1. Soit $\{f_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ une suite de fonctions numériques définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^3 x(\frac{1}{n} - x), & x \in [0, \frac{1}{n}]; \\ 0, & x \in]\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

(a). Montrer que $\{f_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ converge simplement vers 0 sur $[0,1]$. Peut-on affirmer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 0\ ?$$

Justifier la réponse.

(b). Calculer $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$. Étudier la convergence uniforme de $\{f_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ sur $[0,1]$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique telle que $f(x) = x$ sur $[-\pi, \pi[$.

(a). Calculer la série de Fourier de f, en précisant ses coefficients de Fourier.

(b). Étudier la convergence de la série de Fourier et préciser sa valeur éventuelle.

(c). Écrire la formule de Parseval pour la fonction f. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 3. Soit $g(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a). Justifier que $g \in L^1(\mathbb{R})$. En déduire que la transformée de Fourier $\hat{g}(\xi)$ est une fonction continue pour $\xi \in \mathbb{R}$ et que $\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{g}(\xi) = 0$.

(b). Exprimer $\xi\hat{g}(\xi)$ à l'aide de la transformée de Fourier de $g'(x)$. Montrer que $\lim_{|\xi|\to\infty} \xi\hat{g}(\xi) = 0$.

(c). (c1). Déterminer les pôles de la fonction $\frac{1}{1+z+z^2}$ dans $\mathbb{C}$ et calculer le résidu à chacun des pôles.

(c2). Utiliser la méthode des résidus pour calculer $\hat{g}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Examen première session : jeudi 16 mai 2013

Sans document, durée : 1h30

Les calculatrices scientifiques non programmables sont autorisées. Chaque réponse devra être justifiée de façon rigoureuse.

Exercice 1 (Question de cours) Enoncer la formule de Koenig et démontrer cette formule dans le cas d'une variable aléatoire discrète.

Exercice 2 Un joueur dispose d'un dé équilibré à six faces avec trois faces blanches, deux vertes et une rouge. Le joueur lance le dé et observe la couleur de la face supérieure :
- s'il observe une face rouge, il gagne 2 euros ;
- s'il observe une face verte, il perd un euro ;
- s'il observe une face blanche, il relance le dé et : pour une face rouge, il gagne 3 euros ; pour une face verte, il perd 1 euro ; pour une face blanche, le jeu est arrêté sans gain ni perte.

Soit X la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) de ce joueur.

1. Quelles sont les valeurs prises par X. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $E(X)$, $Var(X)$ et $\sigma(X)$.
3. Le joueur effectue 144 parties successives de ce jeu. En utilisant le **TCL**, donner une valeur approchée de la probabilité que son gain sur les 144 parties soit positif.

Exercice 3 1. Dans une université, une promotion de première année ne doit pas dépasser 200 étudiants. En se basant sur le constat que seulement un candidat accepté sur trois viendra effectivement à la rentrée, la politique de l'université est d'accepter systématiquement 525 étudiants.

(a) Donnez la loi de la variable aléatoire X correspondant au nombre d'étudiants effectivement présents à la rentrée ainsi que $E(X)$ et $Var(X)$.

(b) Estimer, en utilisant le théorème de Moivre-Laplace, la probabilité qu'il y ait plus de 200 étudiants présents à la rentrée.

Tournez la page SVP

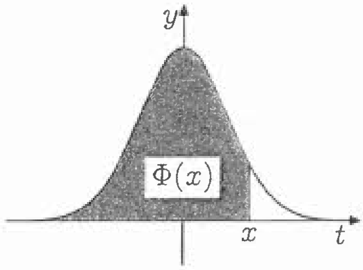
(Rappel : **TCL** (Théorème central limite) : ce théorème affirme que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi et admettant des moments jusqu'à l'ordre 2 alors pour n grand $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ suit approximativement la loi normale $N(nm, \sqrt{n}\sigma)$ avec $m = E(X_i)$ et $\sigma = \sigma(X_i)$.)

2. On suppose maintenant qu'il y a exactement 200 étudiants présents à la rentrée et un enseignant fait passer à ces étudiants un test pour jauger leur niveau. La distribution des notes obtenues à ce test suit une loi normale de moyenne 9 et d'écart-type 2. L'enseignant décide de faire des séances de remise à niveau pour les étudiants les plus faibles mais il ne peut encadrer que 30 étudiants.
   Déterminer la note limite permettant à un étudiant de bénéficier des séances de remise à niveau.

Exercice 4 Le fonctionnement d'une machine est perturbé par des pannes. Soit la variable aléatoire X_1 égale au temps (en heures) écoulé entre la mise en route de la machine et la première panne (panne 1) et soit la variable aléatoire X_2 (respectivement X_3) égale au temps (en heures) écoulé entre la remise en route de la machine après la panne 1 (respectivement 2) et la panne 2 (respectivement 3). On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes et suivent la même loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

1. Quelle est la durée moyenne de fonctionnement entre deux pannes consécutives ?
2. Soit A l'évènement : "chacune des 3 périodes de fonctionnement de la machine dure plus de 2 heures". Calculer $P(A)$.
3. Soit Y la variable aléatoire égale à la plus grande des 3 durées de fonctionnement de la machine sans interruption.
   (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $F_Y(t) = P(Y \leq t)$.
   (b) Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $F_Y'(t)$ et en déduire l'expression d'une densité f_Y de Y.
   (c) En utilisant le fait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-at}dt = \frac{1}{a^2}$ pour $a > 0$, calculer $E(Y)$.

Table des valeurs de Φ (loi normale standard)



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6627	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122	0.7156	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7356	0.7389	0.7421	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8414	0.8438	0.8461	0,8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8622
1.1	0.8643	0.8665	0.8687	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0,8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9083	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9193	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9895	0.9898	0.9901	0.9903	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9926	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9944	0.9946	0.9948	0.9949	0,9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Université de Nentes
L2 Mathématiques - PEIP

Mai 2013

Introduction à l'analyse numérique

Première session, durée : 1h30

Documents interdits. Calculatrice et téléphone portable interdits.

Exercice 1 : Résolution de système linéaire

On considère le système $Mx = b$ avec

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 50 & 10 & 11 \\ 3 & 10 & 14 & 13 \\ 4 & 11 & 13 & 18 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 22 \\ 30 \\ 35 \end{pmatrix}.$$

1. Effectuer la décomposition de Choleski de M.
2. Calculer le déterminant de M (en utilisant la décomposition de Choleski).
3. Résoudre le système $Mx = b$.

Exercice 2 : Interpolation

1. Enoncer le théorème du reste d'interpolation.
2. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Construire le polynôme de Lagrange p_1 qui interpole f aux points 0 et $\sqrt{3}$.
3. En utilisant la question 1., donner une majoration de l'erreur commise en approchant f par p_1 sur $[-2, 2]$.

Exercice 3 : Intégration numérique

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de trouver une formule de quadrature pour approcher l'intégrale

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

Il s'agit d'abord d'écrire une formule de quadrature sur $[-1, 1]$ et de l'étendre à $[a, b]$ par un changement de variables.

1. Construire le polynôme d'interpolation p de f aux points -1, 0 et 1 par la méthode de Newton.
2. En déduire une formule de quadrature basée sur l'approximation :
$$\int_{-1}^1 f(x)dx \simeq \int_{-1}^1 p(x)dx.$$
3. Pour quel degré de polynôme cette formule de quadrature est-elle exacte ?
4. On souhaite étendre cette formule de quadrature à tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
On se donne les points $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ de subdivision uniforme de l'intervalle $[a, b]$ définis par $x_i = a + ih$ avec $h = \dfrac{b-a}{n}$, pour $i = 0, \dots, n$.
A l'aide du changement de variable $x = \dfrac{x_{i+1} - x_i}{2}(t+1) + x_i$, en déduire la formule de quadrature pour
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx.$$
5. En déduire la quadrature pour le calcul approché de (1).

Examen de mathématiques et calcul 3

14 mai 2013

Document autorisé : une feuille A4 recto-verso manuscrite. Aucune machine autorisée. Durée : 1 heure 30 minutes.

Exercice 1

1) Diagonaliser la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) Calculer M^{1000}.

Exercice 2

Le plan euclidien est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$. Les abscisses sont notées x, les ordonnées y. Le domaine T du plan est le triangle défini par les inégalités $x \geq 0, y \geq 0, y \leq 1 - x$. On suppose que la densité de masse surfacique est constante, égale à un.
1) Tracer une grande figure avec tous les éléments dont il est question dans cet exercice.
2) Calculer l'intégrale double de la fonction constante égale à 1 sur T et vérifier que l'on obtient la valeur $1/2$ de l'aire de T.
3) Calculer les coordonnées du barycentre (centre de gravité) B du domaine T en utilisant l'intégrale double des fonctions x et y sur T. Vérifier que l'on obtient $B = (1/3\ ; 1/3)$.

Exercice 3

Une assemblée de 22 personnes doit élire un bureau composé de trois membres : présidente/président, trésorière/trésorier, secrétaire. Quel est le nombre de bureaux possibles ?

Exercice 4

Le plan euclidien $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$. Soit $A = (5\ ; 3)$. Un chemin minimal joignant O à A est une famille $M_0, ..., M_n$ de points de $\mathcal{E}$ telle que $M_0 = O$, $M_n = A$ et $\overrightarrow{M_k M_{k+1}} = \overrightarrow{e_1}$ ou $\overrightarrow{e_2}$ pour k compris entre 0 et $n - 1$.
1) Quelle est la longueur d'un chemin minimal ?
2) Calculer le nombre de chemins minimaux de O à A.

Semestre 2
Session 2

Université de Nantes
Faculté des Sciences et des Techniques
Département de Mathématiques

Année 2012-2013

X3M0050-Algèbre linéaire
Examen du 21 juin 2013

Durée : 1h 30. Documents autorisés : 1 feuille recto-verso

Exercice 1. Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} A$ et de $\operatorname{Im} A$
2. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
3. Expliciter le rang de $A - \lambda I$ selon $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. Pour chaque valeur propre de A, déterminer une base du sous espace propre associé.
5. En déduire une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $P^{-1}AP = D$.

Exercice 2. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

et l'application linéare correspondante $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. Expliciter $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
2. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
3. Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ et deux vecteurs non nuls v_1, v_2 tels que $f(v_1) = \lambda v_1$ et $f(v_2) = v_1 + \lambda v_2$. Démontrer que (v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
4. Quelle est la matrice de passage de la base canonique vers la base (v_1, v_2)?
5. Quelle est la matrice de f dans la base (v_1, v_2)?

Université de Nantes
Faculté des Sciences et des Techniques
Département de Mathématiques

Année 2012-2013

X3M0050-Algèbre linéaire
Examen du 21 juin 2013

Durée : 1h 30. Documents autorisés : 1 feuille recto-verso

Exercice 1. Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} A$ et de $\operatorname{Im} A$
2. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
3. Expliciter le rang de $A - \lambda I$ selon $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. Pour chaque valeur propre de A, déterminer une base du sous espace propre associé.
5. En déduire une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $P^{-1}AP = D$.

Exercice 2. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

et l'application linéare correspondante $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. Expliciter $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
2. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
3. Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ et deux vecteurs non nuls v_1, v_2 tels que $f(v_1) = \lambda v_1$ et $f(v_2) = v_1 + \lambda v_2$. Démontrer que (v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
4. Quelle est la matrice de passage de la base canonique vers la base (v_1, v_2)?
5. Quelle est la matrice de f dans la base (v_1, v_2)?