Examen de mathématiques et calcul 2

X3SI010

10 janvier 2013

Document autorisé : une feuille A4 recto-verso manuscrite, aucune machine autorisée.
Durée : 1 heure 30 minutes.

Exercice 1 : inversion de matrice

Calculer l'inverse de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : isométrie

1) On se place dans l'espace $\mathbf{R}^3$ muni de l'origine O et de la base canonique $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.
Donner la matrice R de la rotation autour du vecteur $\mathbf{t} = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2$, d'angle $\pi/2$.

2) Tracer une figure en perspective avec les images des vecteurs de la base canonique par la rotation.

Exercice 3 : intégrale indéfinie

Donner la nature de l'intégrale suivante.

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{x^2 + x}{e^{3x}} \, dx.$$

Exercice 4 : série de Fourier

On considère la fonction *onde rectangulaire* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, périodique de période 2π et définie par la relation :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{pour} \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Calculer les coefficients de Fourier pour les cosinus :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} f(x) \cos nx \, dx \qquad \text{pour} \qquad n \geq 1.$$

Remarque : On admet que le coefficient a_0 est nul parce que la fonction f est de moyenne nulle sur une période. La fonction f est paire ($f(-x) = f(x)\ \forall x$) donc les coefficients de Fourier (b_n) pour les sinus sont nuls :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} f(x) \, dx = 0 \qquad \text{et } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0 \qquad \text{pour} \qquad n \geq 1.$$

Année universitaire 2012-2013
Semestre ☒ 1 ☐ 2
Session ☐ 1 ☒ 2

UNIVERSITÉ DE NANTES

U.F.R. des Sciences et des Techniques

S.E.V.E. Bureau des Examens

Nom de l'U.E. :	**Matériaux pour l'ingénieur PEIP**
Code de l'U.E. :	**X3PT010**
Date de l'examen :	
Durée :	1 H 30
Documents autorisés :	Aucun
Calculatrice autorisée	☒ oui ☐ non Type : Non-alphanumérique

Numéro d'anonymat : (si réponse sur le sujet)

Matériaux céramiques

Les exercices I, II, III et IV sont indépendants les uns des autres.

I. ETUDE STRUCTURALE DE LA CRISTOBALITE SiO_2

Configurations électroniques

1. La cristobalite est constituée d'atomes de silicium et d'oxygène. Le silicium a pour numéro atomique 14 et l'oxygène 8. Ecrire les configurations électroniques des deux atomes dans leur état fondamental et préciser le nombre d'électrons sur leur couche externe.
2. Donner la configuration électronique des ions Si^{4+} et O^{2-}.

Structure de la cristobalite

La cristobalite peut être décrite comme une structure diamant avec une unité SiO_4 située en chacun des nœuds du réseau (voir la figure 1). Le paramètre de maille est a = 0,717 nm.

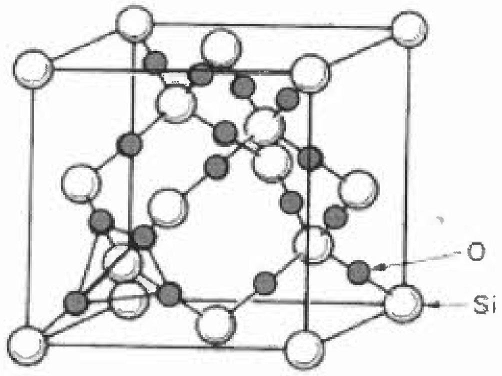

Figure 1. Structure cristalline de la cristobalite. Chaque sphère représente un atome.

3. Combien y-a-t-il d'atomes de silicium et d'oxygène par maille cubique ? Justifier la formule SiO_2.
4. Déterminer la coordinance.
5. Calculer la masse volumique théorique de la cristobalite.

II. DIAGRAMME D'EQUILIBRE DU SYSTEME SiO_2 – Al_2O_3

Le diagramme d'équilibre du système SiO_2-Al_2O_3 est montré sur la figure 2.

5. Quelle est la température de fusion de la silice SiO_2 ?
6. Considérer les points du diagramme caractérisés par les coordonnées suivantes : point P_1 (9%m, 1595°C) et point P_2 (81%m, 1840°C). Comment se nomment ces points ? Ecrire l'équation de la réaction en chacun de ces points.
7. Préciser pour chaque domaine indiqué par une lettre (A, B et C) la nature des phases présentes.

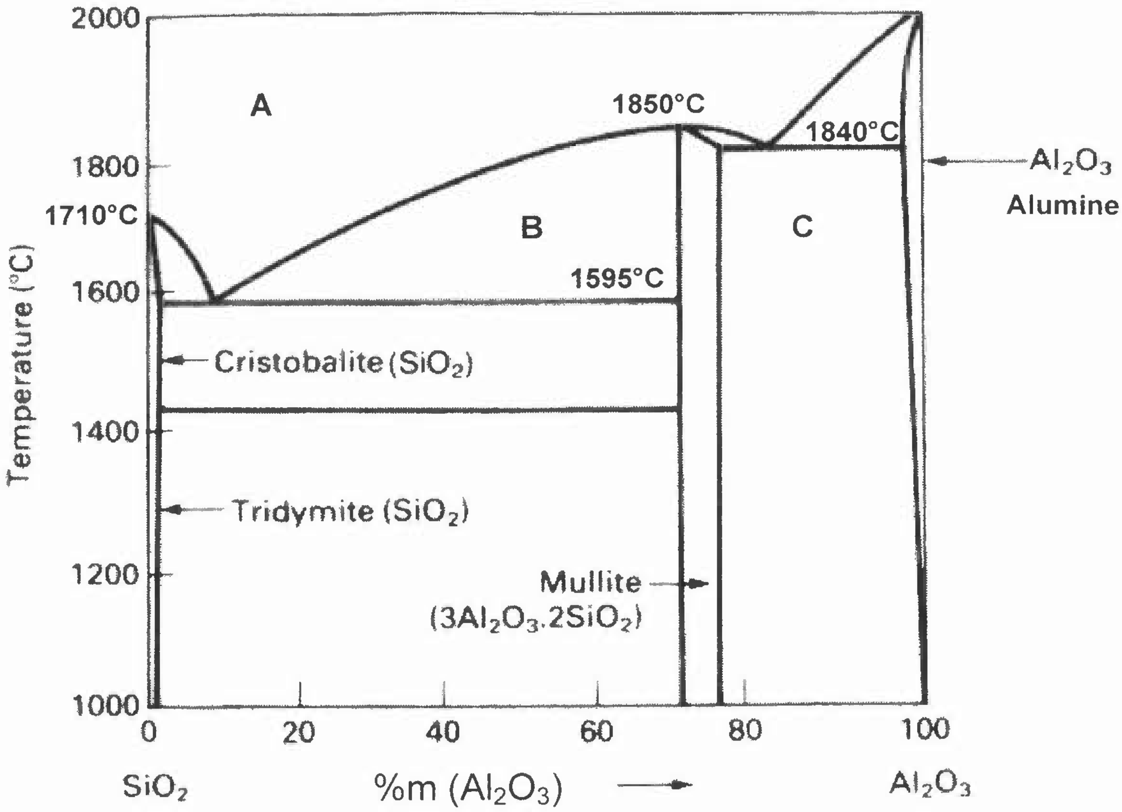

Figure 2. Diagramme d'équilibre du système SiO_2-Al_2O_3.

III. LE CARBURE DE SILICIUM : UNE CERAMIQUE SEMICONDUCTRICE

Le carbure de silicium SiC est une céramique semi-conductrice. A 293 K, sa conductivité électrique intrinsèque σ est de 8 $S.m^{-1}$, la mobilité des électrons μ_e et des trous μ_t sont respectivement de 0,04 $m^2.V^{-1}.s^{-1}$ et 0,02 $m^2.V^{-1}.s^{-1}$ et la largeur de bande interdite E_g est de 2,9 eV.

8. Déterminer le nombre de porteurs de charges électriques par unité de volume du SiC à 293 K.
9. Si de l'azote est ajouté comme dopant au SiC, quel type de semi-conducteur extrinsèque obtient-on ? Justifier précisément en vous référent au tableau 1.
10. Quelle quantité d'azote (en atomes.m^{-3}) faut-il ajouter au SiC pour que sa conductivité soit égale à 10^4 $S.m^{-1}$ à 293 K ? Les mobilités des électrons et des trous sont supposées rester les mêmes que dans le matériau intrinsèque.

IV. VARIATION BRUSQUE DE TEMPERATURE A LA SURFACE D'UNE CERAMIQUE

A l'occasion d'un choc thermique très important, la surface d'une pièce en céramique change instantanément de température. On suppose qu'il n'y a pas d'échange de chaleur avec le cœur de la pièce qui reste un certain temps à la température initiale. Les propriétés de la céramique sont données en annexe dans le tableau 2.

11. Calculer la déformation élastique apparaissant à la surface de la pièce si celle-ci est portée très rapidement à la température de 280°C à partir de la température ambiante (20°C).
12. Dans ce cas, calculer la contrainte apparaissant à la surface de la pièce.
13. Quel type de contrainte apparait sur la surface de la pièce (tension ou compression) ? Justifier.
14. Dans ces conditions d'échauffement brusque, y a-t-il risque de rupture de la céramique s'amorçant à la surface ? Justifier.

Annexe 1 :

Données :

- Nombre d'Avogadro — $N_A = 6{,}022.10^{23}$ mol^{-1}
- Charge élémentaire — $e = 1{,}6.10^{-19}$ C
- Electronvolt — 1 eV = $1{,}6.10^{-19}$ J
- Constante de Boltzmann — $k_B = 1{,}381.10^{-23}$ J.K^{-1}
- Masse molaire :
  - du silicium : $M(Si) = 28{,}09$ g.mol^{-1}
  - de l'oxygène : $M(O) = 16{,}00$ g.mol^{-1}

Tableau 1 : Principaux éléments utilisés dans les semi-conducteurs

II	III	IV	V	VI
	5 B	6 C	7 N	8 O
	13 Al	14 Si	15 P	16 S
30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se
48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te
80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po

Tableau 2 : Propriétés de la céramique

Résistance à la traction	$R_{mt} = 80$ MPa
Résistance à la compression	$R_{mc} = 150$ MPa
Coefficient de dilatation thermique	$\alpha = 6{,}4.\ 10^{-6}$ °C^{-1}
Module de Young	E = 80 GPa

Année universitaire 2012-2013
Semestre ☐ 1 ☒ 2
Session ☒ 1 ☐ 2

UNIVERSITÉ DE NANTES

U.F.R. des Sciences et des Techniques

S.E.V.E. Bureau des Examens

Nom de l'U.E. :	Automatique
Code de l'U.E. :	X4SI020
Date de l'examen :	14 Mai 2013
Durée :	01:30H 14:00-15:30
Documents autorisés :	non
Calculatrice autorisée	☒ oui ☐ non Type :

Les 2 exercices sont indépendants.

1. Transformée de Laplace

Calculer les transformées de Laplace des signaux suivants (Fig. 1) :

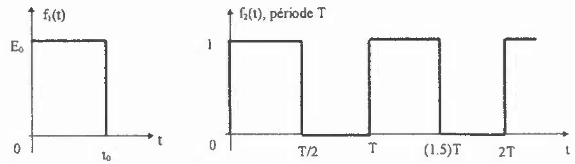

Figure 1.

2. Asservissement de position

Rappels : relations pour un 2[ième] ordre de fonction de transfert sous la forme canonique : $\dfrac{h_0 w_n^2}{s^2 + 2\, z\, w_n s + w_n^2}$,

h_0 est le gain statique, z est le coefficient d'amortissement, w_n est la pulsation naturelle.

Pour $z < 1$, la réponse indicielle est oscillante.

L'amplitude relative d_1 et le temps t_1 du premier dépassement sont donnés respectivement par :

$$t_1 = \frac{\pi}{w_p},\quad w_p = w_n\sqrt{1-z^2},\quad d_1 = exp\left(\frac{-z\,\pi}{\sqrt{1-z^2}}\right),\quad z^2 = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\pi}{ln d_1}\right)^2}$$

On réalise un asservissement de position suivant le schéma (Fig.2) avec les notations suivantes :

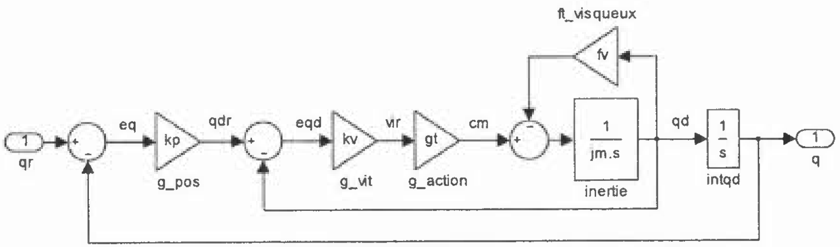

Figure 2.

- position, vitesse, accélération du rotor : q, q_d, q_{dd}, respectivement.
- Gain d'actionnement : $g_t = 0.01$(Nm/V)
- Coefficient de frottement visqueux : $f_v = 4.10^{-5}$ (Nm/(rd/s))
- Moment d'inertie total : $j_m = 5.10^{-6}$ (kgm²)

La commande proportionnelle et dérivée en boucle fermée est définie par la relation :
$v_{ir} = k_v k_p e_q - k_v q_d$

2.1. Calculer la fonction de transfert mécanique du premier ordre : $T_m(s) = \dfrac{q_d}{c_m}$

2.2. Calculer la fonction de transfert en boucle fermée de vitesse : $Tbf_v(s) = \dfrac{q_d}{q_{dr}} = \dfrac{k_{emv}}{1 + t_{emv} s}$

Exprimer k_{emv} et t_{emv} en fonction de k_v, g_t et j_m.

2.3. Calculer littéralement puis numériquement la réponse indicielle $q_d(t)$ de Tbf_v, avec $q_{dr}(t)=U(t)$, échelon unité. Tracer l'allure de la réponse indicielle en indiquant la valeur finale, la tangente à l'origine.

2.4. Calculer la fonction de transfert en boucle ouverte de position : $Tbo_p(s) = \dfrac{q}{e_q}$

2.5. Calculer les pôles de $Tbo_p(s)$. Est ce que la boucle ouverte de position $Tbo_p(s)$ est stable?

2.6. Calculer la fonction de transfert en boucle fermée de position sous la forme d'un 2[ième] ordre normalisé :

$$Tbf_p(s) = \frac{q}{q_r} = \frac{Tbf_{p0}}{1 + \dfrac{2\,z}{w_n}s + \dfrac{s^2}{w_n^2}}$$

2.7. Calculer l'amortissement z, la pulsation naturelle w_n, le produit $(z\, w_n)$ et le gain statique Tbf_{p0} en fonction de k_v et de k_p et des paramètres du système.

2.8. Calculer les pôles de Tbfp(s) suivant les valeurs de z.
Tracer le lieu des pôles dans le plan complexe en fonction des valeurs de z avec w_n constant, w_n=1.
Tracer le lieu des pôles dans le plan complexe en fonction des valeurs de w_n, avec z constant, z=1/2

2.9. Calculer z pour obtenir le 1[er] dépassement relatif de la réponse indicielle d_1=20%
Calculer w_n pour obtenir d_1 à l'instant t_1=0.1(s)

2.10. Calculer littéralement, puis numériquement, k_v et k_p qui permettent d'obtenir ces performances.

2.11. Calculer littéralement la valeur de la tangente à l'origine de la réponse indicielle.

2.12. Calculer ε_1, l'erreur statique d'ordre 1.

2.13. Calculer ε_2, l'erreur statique d'ordre 2.

2.14. Tracer l'allure de la réponse indicielle $q(t)$.

2.15. Tracer l'allure de la réponse $q(t)$ à une rampe unité.