Mathématiques

Semestre 1

CS1: Examen du 10 janvier 2012

Problème
On considère le système suivant:

$$\partial_t u - \partial_x(w - u) = 0,$$
$$\partial_t w - \partial_x(w + \frac{u^3}{3}) = 0.$$

Remarque: les questions 3 et 4 sont indépendantes.

1. Montrer que ce système est un système hyperbolique de lois de conservation. On notera λ_1 et λ_2 les valeurs propres de la matrice jacobienne du flux. Montrer que l'on peut choisir $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

2. Donner la nature des champs caractéristiques (on supposera que $u > 0$).

3. Dans cette question, on considère le problème de Riemann suivant pour ce système.

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^\top & \text{si } x < 0, \\ \begin{pmatrix} u_D & w_D \end{pmatrix}^\top & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec u_D et w_D deux constantes données.

   (a) Montrer qu'une 1-détente peut être caractérisée par une courbe d'équation:

$$w(u) = \frac{u\sqrt{1+u^2} + \operatorname{argsh}(u)}{2} + u + C,$$

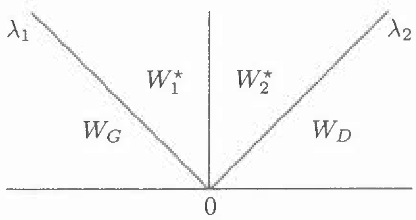
   où C est une constante que l'on précisera. Quelle est la partie de la courbe admissible pour une 1-détente? Donner la courbe d'une 2-détente.

   (b) Donner les courbes d'un 1-choc et d'un 2-choc.

   (c) Tracer ces courbes dans le plan (u, w).

   (d) Quelle sera la forme de la solution si $u_D = 1$ et $w_D = 1$?

4. On veut construire un solveur de Riemann approché pour la résolution numérique de ce système. Pour cela, on considère un solveur de type HLL à deux états intermédiaires comme sur la figure 4. Plus précisément, on considère des ondes de vitesse λ_1, 0 et λ_2 et des états intermédiaires donnés par:



- les relations de Rankine-Hugoniot pour la première équation (celle sur u),
- la consistance au sens intégral pour la seconde équation (celle sur w).

(a) Montrer que ces conditions sur les états intermédiaires impliquent la consistance au sens intégral pour le système tout entier.

(b) Montrer que ces conditions définissent de manière unique les deux états intermédiaires.

(c) En supposant les états intermédiaires connus, quel est la forme du flux numérique de ce schéma?

(d) Donner explicitement ce flux numérique en fonction de W_G et W_D.

(e) Quelle est la condition CFL pour ce schéma?

Exercice
Résoudre le problème suivant:

$$\partial_t u + \partial_x \frac{u^4}{4} = 0,$$

$$u(0,x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x < -1, \\ 0 \text{ si } -1 < x < 1, \\ -1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

L3 Math | Analyse Numérique 1 Durée : 2h sans document | Janvier 2013

Exercice 1

Pour toute fonction f définie et intégrable sur $[-1, 1]$, on considère l'intégrale définie par

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)|x|dx$$

On définit alors le produit scalaire

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)|x|dx \qquad f, g \in L^2(-1, 1)$$

On note $(\psi_m)_{m\geq 0}$ la famille des polynômes orthogonaux pour le produit scalaire $(.,.)$ tel que ψ_m est de degré m et de coefficient de plus haut degré égal à 1.

On note $(x_i)_{i=0}^{N}$ les racines de ψ_{N+1}. On admettra que toutes ces racines sont dans $]-1, 1[$.

On approche $I(f)$ par la quadrature $I_N(f) = \sum_{i=0}^{N} \omega_i f(x_i)$

1. Donner la définition des poids ω_i pour que la quadrature soit au moins d'ordre N. Démontrer que cette condition est nécessaire et suffisante pour assurer au moins un ordre N.
2. Démontrer que la quadrature est au moins d'ordre $2N + 1$. Indication : on pourra considérer la division Euclidienne de p par $\Pi_{i=0}^{N+1}(x - x_i)$.
3. Montrer que la quadrature ne peut pas être d'ordre $2N + 2$.
4. Ecrire explicitement la quadrature d'ordre 3.

Exercice 2

On souhaite approcher l'EDO suivante :

$$y'(t) = f(y(t))$$
$$y(0) = y_0$$

1. En intégrant l'EDO sur l'intervalle $[t^n, t^n + \Delta t]$, montrer que l'on a

$$y(t^n + \Delta t) - y(t^n) = \frac{\Delta t}{2} \int_{-1}^{1} f\left(y(t^n + \frac{\Delta t}{2}(1 + s))\right) ds$$

2. Pour approcher l'intégrale $\int_{-1}^{1} g(s)ds$, on utilise une quadrature de Gauss-Legendre de la forme

$$I_N(g) = \sum_{i=0}^{N} \omega_i g(s_i)$$

Donner la définition de ω_i et s_i pour que cette quadrature soit d'ordre $2N + 1$.

3. On adopte l'approximation suivante :

$$y(t^n + \frac{\Delta t}{2}(1+s)) \sim y(t^n) + \frac{\Delta t}{2}(1+s)f(y(t^n))$$

En appliquant la quadrature de la question précédente, montrer que l'on obtient un schéma de la forme

$$y^{n+1} = y^n + \frac{\Delta t}{2}\sum_{i=0}^{N} \omega_i f\left(y^n + \frac{\Delta t}{2}(1+t_i)f(y^n)\right)$$

en précisant la définition de t_i.

4. Montrer que le schéma est consistant.

5. Donner explicitement le schéma pour $N = 1$.

Exercice 3

Soit A une matrice symétrique définie positive de taille N et on cherche à résoudre le système linéaire $Ax = b$. On considère la méthode itérative suivante :

$$x^{k+1} = x^k + \alpha r^k \quad \text{avec} \quad r^k = b - Ax^k$$

où α est une matrice de taille $N \times N$.

1. Donner la condition sur α telle que si x^k converge vers y, alors y est la solution cherchée.

2. Dans un premier temps, on suppose que $\alpha = \beta I_d$ où β est un paramètre réel non nul. Donner la matrice B d'itération de la méthode.

3. Donner les valeurs propres de B.

4. On note λ_N la plus grande valeur propre de A. Montrer que pour $0 < \beta < \frac{2}{\lambda_N}$, la méthode est convergente.

5. Trouver le meilleur choix de β, celui qui minimise le rayon spectral de B. On notera β_{opt} la valeur obtenue et B_{opt} la matrice d'itération associée.

6. Montrer que le rayon spectral de B_{opt} est donné par $\frac{cond_2(A)-1}{cond_2(A)+1}$.

7. A présent, on suppose que $\alpha = \beta D^{-1}$ où D est la matrice diagonale constituée de la diagonale de A. Exprimer les coefficients de la matrice $D^{-1}A$ en fonction de la matrice A.

8. On suppose que A est à diagonale strictement dominante et $0 < \beta \leq 1$. Montrer que la matrice α vérifie la condition établie dans le première question.

9. Montrer que $\| I - \beta D^{-1}A \|_\infty < 1$.

10. En déduire que la méthode est convergente.

Examen du 9 janvier 2013. Durée : 2 heures

Documents autorisés : polycopié du cours.

Il y a quatre exercices indépendants.

Exercice 1. Soit ABC un triangle. A l'extérieur du triangle ABC on construit les carrés $ACDE$ et $ABFG$, voir figure 1 ci-jointe.

Précision : dire que le carré $ACDE$ est extérieur au triangle ABC revient à dire que les points D et E se trouvent dans le demi-plan délimité par la droite (AC) ne contenant pas B. De même, dire que le carré $ABFG$ est extérieur au triangle ABC revient à dire que les points F et G se trouvent dans le demi-plan délimité par la droite (AB) ne contenant pas C.

Soit I le milieu de $[BC]$. Le but de l'exercice est de prouver par des méthodes analytiques que les droites (AI) et (EG) sont perpendiculaires.

Pour cela on considère le repère orthonormé $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où

$$\vec{\imath} = \frac{1}{\|\overrightarrow{AC}\|}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \vec{\jmath} = \frac{1}{\|\overrightarrow{AE}\|}\overrightarrow{AE}.$$

Pour simplifier, on note b la longueur AC. Dans le repère $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a alors $A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}$ et $E\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}$.

Dans toute la suite, on note respectivement p et q les coordonnées du point B dans le repère $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$: $B\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$.

1. En considérant une équation cartésienne de la droite (AC), justifier que $q < 0$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) et en déduire que le demi-plan délimité par la droite (AB) ne contenant pas C est défini par l'inéquation : $q\,x - p\,y > 0$.
3. Prouver que les coordonnées du point G dans le repère $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont $(q, -p)$.
   On vérifiera que si l'on note P le point du plan de coordonnées $(q, -p)$, alors (AB) et (AP) sont perpendiculaires, que $AB = AP$, et que P se trouve dans le demi-plan délimité par la droite (AB) ne contenant pas C.
4. Montrer que $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{EG} = 0$, et conclure.
5. Montrer que les segments $[BE]$ et $[CG]$ sont perpendiculaires et ont même mesure de longueur.

Exercice 2. Soit ABC un triangle isocèle en A. On note A' le milieu de $[BC]$. A l'extérieur du triangle ABC, on construit les triangles équilatéraux ABD et ACD, voir figure 2.

On note σ la réflexion d'axe (AA'). Le but de l'exercice est de justifier en utilisant la transformation σ quelques propriétés graphiquement « évidentes » de la figure 2.

1. Quelle est l'image du point B par σ ? (Justifier votre réponse).
2. Prouver [1] que l'image du point D par σ est le point E.

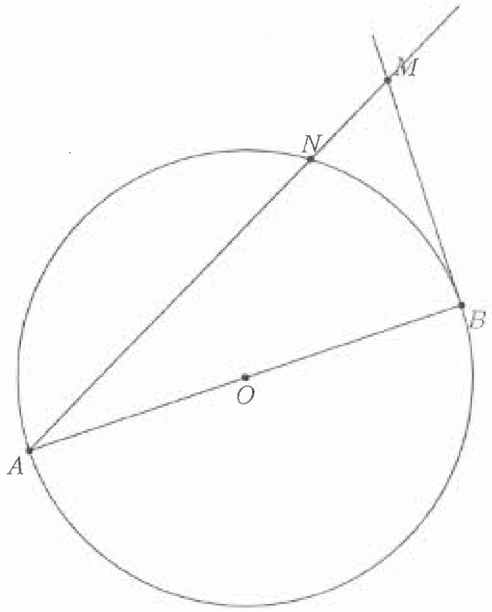
1. Penser au propriétés des réflexions.

3. En déduire que $BE = CD$.
4. On admet sans le justifier que les droites (BE) et (CD) ont un point d'intersection I. Prouver que I est un point de (AA').

Exercice 3. Soit $ABCD$ un rectangle du plan.

1. Montrer, en utilisant des relations de Chasles, que pour tout point M du plan, on a
$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MD}\,.$$
2. En déduire que pour tout point M du plan, on a
$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2\,.$$

Exercice 4. Soit $\mathcal{C}$ un cercle du plan de centre O. Soient A et B deux points du cercle $\mathcal{C}$ tels que $[AB]$ soit un diamètre de $\mathcal{C}$. Soit N un point du cercle $\mathcal{C}$ distinct de A et B. On note M le point d'intersection de la droite (AN) et de la tangente au cercle en B.



Prouver que les secteurs angulaires $\widehat{MBN}$ et $\widehat{ANO}$ ont même mesure.
On admettra (c'est une évidence graphique) que N est entre A et M.

Examen du 9 janvier 2013.

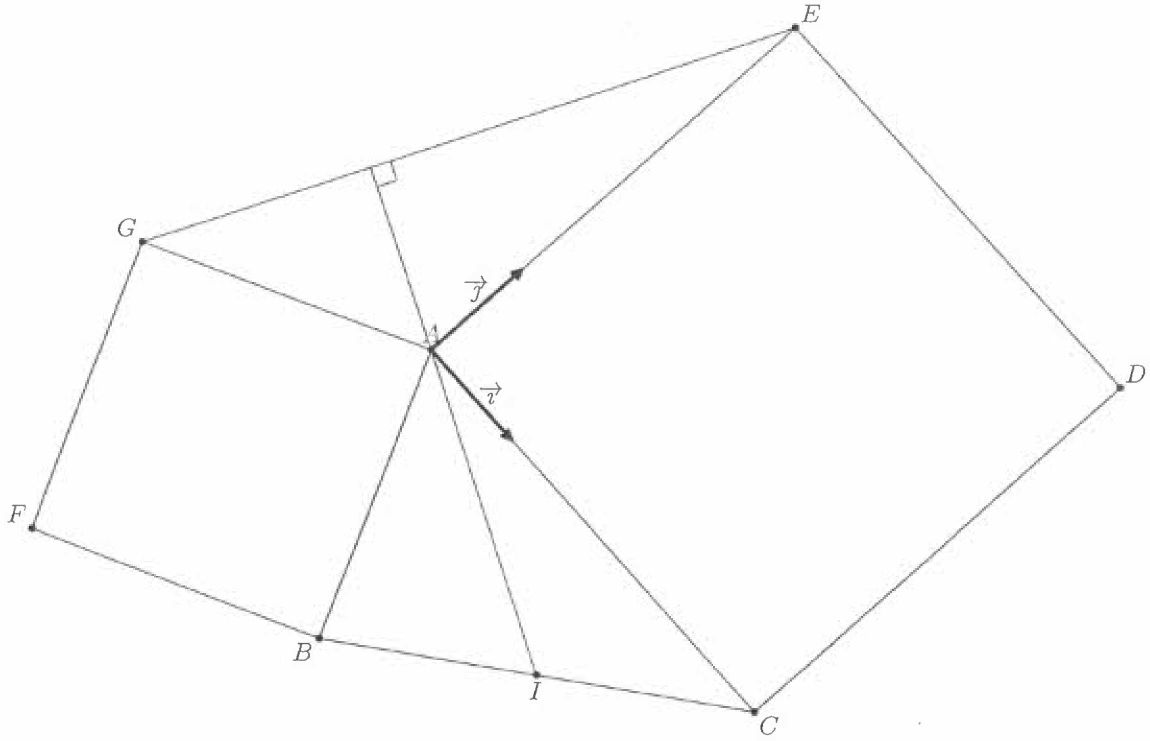


Figure 1.

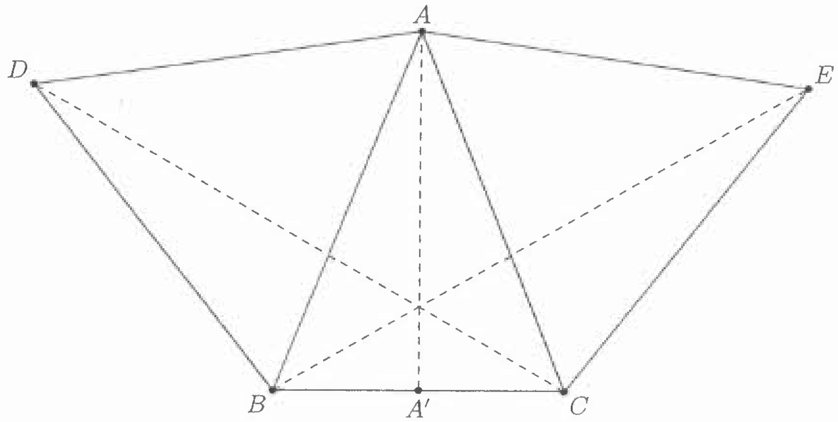


Figure 2.

NOM :
PRÉNOM :
NUMÉRO D'ÉTUDIANT :

Examen première session
(Première partie)

Aucun document n'est autorisé, à part une feuille manuscrite (format A4) recto-verso. La calculatrice est autorisée.

Sauf indication contraire, toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1.
Écrire $(413)_{\text{cinq}}$ en base sept.

Exercice 2.
Calculer en posant l'opération $(23)_{\text{cinq}} \times (44)_{\text{cinq}}$.
(*Il est possible d'établir la table de multiplication en base cinq si besoin.*)

Exercice 3.
L'entier n a 6 chiffres et s'écrit $n = x1527y$. On sait que n est un multiple de 4 et que si on le divise par 11, le reste est égal à 5. Trouver n.

Exercice 4.
Décomposer en facteurs premiers les nombres $a = 441\ 441$ et $b = 159\ 705$, puis en déduire $PGCD(a, b)$ et $PPCM(a, b)$.

Exercice 5.

1. Déterminer tous les couples d'entiers $(x; y)$ tels que $12x + 31y = 534$.
2. En multipliant mon jour de naissance par 12 et mon mois de naissance par 31, j'obtiens 534. Quelle est ma date de naissance ?

Exercice 6.

1. Montrer que 13 divise $3^{126} + 5^{126}$.
2. Montrer que 13 divise $N = 333934^{126} + 903778^{126}$.

Exercice 7.

1. Soit b un nombre entier tel que $1 \leq b \leq 2007$.
   En considérant le nombre $a = 2007! + b$, montrer qu'il existe une liste de 2007 entiers consécutifs non premiers.
2. Comment construire une liste de n entiers naturels consécutifs non premiers ?

Université de Nantes —Licence de Sciences Exactes et Naturelles— Année 2012-2013

UFR Sciences

X5SE010 : Fondements de la théorie des nombres. Examen Première session (seconde partie à rédiger séparément de la première partie)

Merci de rédiger vos réponses à cette seconde partie à la suite des réponses à la première partie.

Les calculs doivent apparaître sur la copie (même ceux effectués à l'aide calculatrice).

Exercice 1

On donne la factorisation suivante : $999\,999 = 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$.

Écrire sous forme de fraction irréductible les nombres rationnels dont le développements décimaux périodiques illimités sont les suivants

(a) $0,\underline{\dot{0}2013\dot{0}} = 0,020130\ 020130\ 020130\ \ldots$

(b) $2012,\underline{\dot{0}2013\dot{0}} = 2012,020130\ 020130\ 020130\ \ldots$

Exercice 2

1. (a) Montrer que la partie entière de $\sqrt{5}$ est 2.

   (b) Montrer l'égalité $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2} = 2+\sqrt{5}$.

   (c) En déduire la partie entière de $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$.

   (d) En déduire que $\sqrt{5}$ admet le développement en fraction continue infini

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

   (e) Le résultat précédent permet-il de décider si $\sqrt{5}$ est rationnel ou irrationnel ? Justifier votre réponse à l'aide du cours.

2. Exprimer les cinqs premières réduites, r_0, r_1, r_2, r_3 et r_4 de $\sqrt{5}$ sous forme de fractions irréductibles.
3. Déterminer le développement périodique illimité de la fraction $\dfrac{161}{72}$.
4. On donne $305 \times 72 = 21\,960$. Donner sans calcul, à l'aide d'un résultat du cours que vous citerez, l'approximation décimale à 10^{-3} près par défaut de $\sqrt{5}$.

Exercice 3

Une calculatrice donne seulement neuf chiffres significatifs après la virgule. Elle indique :

$$\frac{5\ 152}{333\ 667} \approx 0,01\ 5440\ 5440$$

Quel est le développement décimal illimité cette fraction ? [1]

1. Si vous n'avez pas votre calculatrice, vous pourrez utiliser les produits suivants : $4 \times 333\ 667 = 1\ 334\ 668$ et $5 \times 333\ 667 = 1\ 668\ 335$

Semestre 2

Algèbre et Géométrie, X6M0030

Examen 2013, première session

Version du 14 mai 2013

Vous avez le droit d'utiliser une feuille A4, manuscrite, recto-verso comme aide-mémoire. Justifiez vos affirmations, exprimez vos idées avec des phrases entières tout en restant concis.

Exercice 1 Pourquoi un sous-groupe d'indice 2 est-il normal ?

Exercice 2 Soit G un groupe et x un élément d'ordre n dans G. Pour $k \in \mathbf{Z}$, quel est l'ordre de x^k ?

Exercice 3 Montrez qu'un groupe fini d'ordre pair possède un nombre impair d'éléments d'ordre 2.
Indication Accouplez x avec x^{-1}.

Exercice 4 Groupe avec gros centre.

1. Rappelez pourquoi un groupe d'ordre premier est cyclique.
2. Soit G un groupe et $Z(G)$ son centre (c'est-à-dire l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que $gx = xg$ pour tout $x \in G$). Supposons que $G/Z(G)$ est un groupe cyclique. Montrez que ceci entraîne que G est abélien.
3. Montrez qu'un groupe d'ordre p^2, p premier, est abélien.

Exercice 5 Rotations dans l'espace de dimension trois.

1. Fixons un vecteur $v \in \mathbf{R}^3$ de norme $\|v\| = 1$ et désignons par $R_v(\alpha) = R(\alpha)$ la rotation d'axe v et d'angle α. Si $w \in \mathbf{R}^3$ est un vecteur unitaire ($\|w\| = 1$), orthogonal à v, on note par $S(w)$ le demi-tour d'axe w, c'est-à-dire $S(w) = R_w(\pi)$. Montrez que
   (a) $R(\alpha)S(w)R(\alpha)^{-1} = S(R(\alpha)w)$;
   (b) $S(w)R(\alpha)S(w)^{-1} = R(-\alpha)$.
2. Soit D une droite de l'espace (affine) euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3 et $P \in D$ un point sur cette droite. Notons par $G \subseteq Iso(\mathcal{E})$ l'ensemble des symétries de cette configuration :
$$G = \{f \in \mathrm{Iso}(\mathcal{E}) \; : \; f(P) = P \; \text{ et } \; f(D) = D\} \; .$$
   (a) Montrez que G est un sous-groupe de $Iso(\mathcal{E})$.
   (b) Rappelons qu'une rotation de $\mathcal{E}$ est une isométrie qui admet un point fixe et qui préserve l'orientation. Désignons par $Rot \subset G$ le sous-groupe des rotations d'axe D. Montrez que $Rot \subset G$ est un sous-groupe normal.
   (c) Montrez que G/Rot est isomorphe à $K = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (le groupe de Klein).
   (d) (Question bonus) Est-ce que $G \cong Rot \times K$?

Université de Nantes
Fonctions analytiques

Département de Mathématiques

Examen du 16 Mai 2013

Durée 1h30
Sans documents. Sans calculatrice
Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1. Soit f holomorphe dans un voisinage du disque fermé $\overline{D(0,1)} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ telle que $f(0) = f'(0) = 1$. Soit γ le cercle unité orienté positivement ($\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$). Calculer l'intégrale

$$\int_\gamma \left(1 + z - \frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z}\, dz\,.$$

Exercice 2. Soit $f(z) = \dfrac{e^{i\pi z}}{1 + z + z^2}$. Pour tout $R > 1$ on considère le chemin $\gamma_R := \alpha_R \cup \beta_R$ orienté positivement, où $\alpha_R := [-R, R]$ et $\beta_R := \{Re^{it} : 0 \leq t \leq \pi\}$.

1. Est-ce que f est une fonction méromorphe? Quel sont les pôles de f et les résidus correspondant dans le demi-plan $\{\operatorname{Im} z \geq 0\}$?
2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)dz$.
3. Trouver $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\beta_R} f(z)dz$.
4. En déduire la valeur de l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\pi x)}{1 + x + x^2}\, dx\,.$$

Exercice 3.

1. Expliciter le module de $e^{\alpha + i\beta}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. Soient a et A deux nombres positifs. Trouver toutes les fonctions entières f (i.e. holomorphes sur $\mathbb{C}$) qui vérifient
$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}\,, \quad |f(x + iy)| \leq Ae^{ax}\,.$$

Exercice 4.

1. La fonction $z \to e^{1/z}$ est-elle méromorphe sur $\mathbb{C}$? Justifier la réponse.
2. Soit γ le cercle unité orienté positivement. En développant la fonction $e^{1/z}$, $z \neq 0$, en séries entière par rapport à $w = 1/z$ calculer l'intégrale
$$\int_\gamma e^{1/z}\, dz\,.$$