Mathématiques

Semestre 1

UNIVERSITÉ DE NANTES

Master I : Ingénierie mathématique

Examen Janvier 2013 - Probabilités
Anne PHILIPPE

EXERCICE 1.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \quad \text{avec} \quad Y_i = e^{X_i} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer qu'il existe une constante c telle que $\sqrt{n}(S_n - c)$ convergence en loi. Préciser la limite et la valeur de c.

2) Montrer qu'il existe une constante d telle que $\sqrt{n}(e^{S_n} - d)$ convergence en loi. Préciser la limite et la valeur de d.

3) Parmi les suites suivantes lesquelles convergent en loi :

   a) $\sqrt{n}S_n(S_n - c)$

   b) $S_n(S_n - c)$

   c) $nS_n(S_n - c)$

   Justifier votre réponse et préciser la limite lorsqu'elle existe.

EXERCICE 2.

Rappel : Pour tout $n > 0$, on a
$$\Gamma(n) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-x}x^{n-1}\,\mathrm{d}x = (n-1)!$$

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire dont la loi admet pour densité

$$f(x,y) = e^{-y}\, \mathbb{1}_{[0,y]}(x)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)$$

1) Vérifier que la fonction f définit bien la densité d'une loi de probabilité.

2) Calculer la densité de la loi de Y. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.

3) Quelle est la loi conditionnelle de X sachant Y ?

4) Calculer l'espérance conditionnelle de X sachant Y.

5) En déduire l'espérance de X.

4

EXERCICE 3.

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie par

$$F_n(x) = \frac{e^{nx}}{e^{nx}+1}, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction F_n est une fonction de répartition.
2) Montrer que la loi de répartition F_n admet pour densité

$$f_n(x) = \frac{ne^{nx}}{(e^{nx}+1)^2}.$$

3) Pour tout réel x, calculer la limite de $F_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$.
4) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_n admet pour fonction de répartition F_n.
La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge t-elle en loi quand $n \to \infty$? Si oui préciser la limite.

Soit U une variable aléatoire. La loi de U est la loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour tout entier n, on pose

$$Z_n = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{U}{1-U}\right)$$

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la densité de la loi de Z_n. En déduire que les variables aléatoires Z_n et X_n ont la même loi.
6) Montrer que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque surement vers zéro.

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{U_n}{1-U_n}\right)$$

7) Justifier que les variables aléatoires $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes et pour tout $n \in \mathbb{N}$, W_n et X_n ont même loi.
8) Calculer pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité $p_n = P(|W_n| > \varepsilon)$.
9) La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n$ est-elle convergente ?
10) La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle presque surement ? si oui préciser la limite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Y_n = e^{nW_n}$.

11) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. Préciser la densité de la loi commune.
12) La suite $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ converge-t-elle presque sûrement ? si oui préciser la limite.

Semestre 2
Session 2

Université de Nantes Département de Mathématiques

Master 1, Module d'analyse

Session de juin 2013, durée : 3h.

Exercice 1
Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé et soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans $(X, \|\cdot\|)$.
On suppose que $(x_n)_{n\geq 1}$ admet une sous suite convergente, montrer que toute la suite converge.

Exercice 2
Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et X, Y deux ouverts de $\mathcal{B}$ qui sont denses dans $\mathcal{B}$. Montrer que $X \cap Y$ est encore ouvert et dense de $\mathcal{B}$.

Exercice 3 On considère l'application linéaire de $T : \ell^2 \to \ell^2$ définie par

$$T(x_n)_{n\geq 1} = (y_n)_{n\geq 1} \quad \text{avec} \quad y_n = \frac{x_n}{n}.$$

1. Montrer que T est continue.
2. Soit $x^{(n)}$ la suite de ℓ^2 dont les n premiers éléments valent 1 puis tous les autres 0 :

$$x_k^{(n)} = 1 \text{ pour } 1 \leq k \leq n, \quad x_k^{(n)} = 0 \text{ pour } n < k.$$

   Montrer que $Tx^{(n)}$ converge dans ℓ^2 vers un éléments de ℓ^2 qui n'est pas dans l'image de T.
3. Qu'en déduit-on sur l'image de T ?

Exercice 4
Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|$.

1. Soit Y un sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{B}$ tel que $Y \neq \mathcal{B}$ et soit $x \in \mathcal{B} \setminus Y$.
   (a) Montrer que $d = \inf\{\|x - y\|, \ y \in Y\} > 0$.
   (b) Montrer qu'il existe $z \in Y$ tel que $\|x - z\| < 2d$.
   (c) Soit $\hat{x} = \frac{x-z}{\|x-zl}$. Montrer que $\|\hat{x} - y\| > 1/2$ pour tout $y \in Y$.
2. On suppose dorénavant que $\mathcal{B}$ est de dimension infini et on pose

$$B = \{x \in \mathcal{B} \mid \|x\| \leq 1\}.$$

   (a) Utiliser la question précédente pour construire itérativement une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ vérifiant

$$(\star) \quad \|x_n - x_m\| > 1/2 \quad \text{pour } n \neq m.$$

   (b) En déduire que B n'est pas compact.
3. On choisit $\mathcal{B} = L^\infty(0, 1)$ muni de la norme infini. Donner un exemple d'une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ qui satisfasse $(\star)$.

6

Partiel analyse fonctionnelle
Seconde session
Durée 3H00

Documents et téléphones interdits, calculatrices autorisées

Pour tout la suite, on considère Ω un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^d$ et l'espace de Hilbert complexe $L^2(\Omega)$ des (classes de) fonction(s) de carré intégrables (définies presque partout), et muni du produit scalaire usuel noté $\langle .,. \rangle$.

Exercice 1 — On considère et une fonction mesurable $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$. On définit alors l'opérateur

$$\begin{array}{rccl} T_K : & L^2(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ & u & \longmapsto & T_K u \quad \text{avec} \quad T_K u(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)dy \end{array}$$

On suppose qu'il exists une constante $M \geq 0$ telle que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int |K(x,y)| dy \leq M \qquad \text{et} \qquad \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \int |K(x,y)| dx \leq M$$

Montrer que pour tout $u \in L^2$, on a $\|T_K u\| \leq M \|u\|$.

Exercice 2 — Calculer l'intégrale $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$ à l'aide de la formule des résidus.

Exercice 3 — Pour la suite on considère une fonction $q : [0, R[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $q(t) \geq 1$ pour tout $t \in [0, \infty[$. On rappelle que l'espace de Hilbert $H^1_R \overset{\text{def}}{=} H^1([0,R], \mathbb{C})$ est constitué des fonctions $f \in \mathcal{C}^0([0,R], \mathbb{C})$ pour lesquelles il existe une fonction $f' \in L^2([0,R], \mathbb{C})$ telle que $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$. On note pour f, $g \in H^1_R$,

$$Q_R(f) = \int_0^R \left(|f'(t)|^2 + q|f(t)|^2\right) dt, \qquad B_R(f,g) = \int_0^R \left(f'(t)\overline{g'(t)} + q(t)f(t)\overline{g(t)}\right) dt$$

1) Vérifier que B est un produit scalaire sur H^1_R. On admet que la norme qu'il définit est équivalente à la norme usuelle sur $H^1([0,R], \mathbb{C})$.

2) a) Démontrer qu'il existe une constante c_R telle que pour tout $v \in H^1([0,R], \mathbb{C})$, on a

$$\sup_{x \in [0,R]} |v(x)| \leq c_R \sqrt{Q_R(v)}.$$

b) En déduire que $W_R \overset{\text{def}}{=} \left\{ v \in H^1_R,\ v(R) = 0 \right\}$ est un sous espace vectoriel fermé de H^1_R.

3) a) Montrer qu'il existe un unique $f_R \in W_R$ tel que

$$\forall v \in W_R, \quad v(0) = B_R(v, f_R)$$

(on pourra utiliser le théorème de Riesz).

b) Montrer que $f_R(0) > 0$. On pose alors $\psi_R = f_R/f_R(0)$.

c) Montrer que pour tout $v \in W_R$ tel que $v(0) = 1$, on a $Q_R(v) \geq Q_R(\psi_R)$.

4) Pour la suite on introduit les fonctions ϕ, χ : $[0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle $-y'' + qy = 0$, et qui vérifient

$$\phi(0) = 0, \; \phi'(0) = 1 \quad \text{respectivement} \quad \chi(0) = 1, \; \chi'(0) = 0.$$

a) Montrer que $\phi'(x)\phi(x) = \int_0^x \left((\phi'(t))^2 + q(t)(\phi(t))^2\right) dt$.

b) En déduire que ϕ est strictement croissante.

c) Montrer que χ/ϕ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

5) Pour $R > 0$ on pose $\lambda_R = \chi(R)/\phi(R)$ et $\xi_R = \chi - \lambda_R \phi$.

a) Montrer que pour tout $t > 0$ on a $\xi_R > 0$.

b) Montrer que ξ_R décroît sur $[0, R]$ et en déduire que $\xi_R(t) \leq 1$ sur $[0, R]$.

6) a) Démontrer que pour tout $v \in W_R$ tel que $v(0) = 1$, $Q_R(v) \geq Q_R(\xi_R)$. (On pourra écrire $v = v - \xi_R + \xi_R$ et calculer $B_R(v - \xi_R, \xi_R)$).

b) En déduire que $\xi_R = \psi_R$.

c) Démontrer que $Q_R(\xi_R) = \lambda_R$.

d) Montrer que pour tout t fixé, la fonction $R \longrightarrow \psi_R(t)$ est croissante majorée par 1.

7) On pose pour la suite pour tout $t \in [0, \infty[$, $\psi(t) = \lim_{R\to\infty} \psi_R(t)$.

a) Montrer que pour tout $t \geq 0$, $0 < \psi(t) \leq 1$, que ψ est décroissante et que ψ satisfait l'équation différentielle $-y'' + qy = 0$.

b) Montrer que pour tout $R \geq 1$,

$$\int_0^R |\psi(t)|^2 dt \leq Q_R(\xi_R) \leq \lambda_1.$$

c) En déduire que $\psi \in L^2(\mathbb{R}_+)$.

Département de Mathématiques
Université de Nantes

Master de mathématiques
Analyse numérique

Examen de 2nde session 2013
Durée : 3h - Sans document

Exercice 1 : Polynômes de Tchebycheff II

1. On note U_n le polynôme de Tchebycheff de seconde espèce de degré n défini sur $[-1,1]$ et tel que $U_n(1) = 1$. La famille $(U_n)_n$ est orthogonale dans $L^2_\omega(-1,1)$ pour le poids $\omega(x) = \sqrt{1-x^2}$. Calculer U_0, U_1 et U_2.
2. Montrer que U_n peut s'obtenir par la formule :

$$U_n(x) = \frac{\sin\big((n+1)\mathrm{acos}(x)\big)}{\sin(\mathrm{acos}(x))}.$$

3. Montrer que pour tout x et $n > 1$:

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x),$$

   En déduire l'expression de U_3.
4. Soit $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Donner l'expression du polynôme de degré 2 de meilleure approximation de f au sens L^2_ω.

Exercice 2 : Schémas pour l'équation de transport

On cherche à approcher approcher numériquement les solutions de l'équation de transport :

$$\partial_t u + a\partial_x u = 0,$$
$$u(0,x) = u_0(x),$$

où $a \in \mathbb{R}^+$ et u_0 est une fonction donnée.

1. Vérifier que $u(t,x) = u_0(x - at)$ est solution du problème.
2. On considère les 3 schémas numériques suivants :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - c(u_i^n - u_{i-1}^n),$$
$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n),$$
$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{c^2}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n),$$

   où l'on a posé $c = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$.
   Etudier la consistance et la stabilité au sens L^2 de ces 3 schémas.
3. Que peut-on conclure ?

8

Exercice 3 : Un problème de réaction-diffusion

On s'intéresse au problème suivant :

$$\partial_t V + m(t,x).V - \sigma \partial_{xx} V = 0,\ (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times [0,1], \quad (1)$$
$$V(t,0) = a,\ t > 0, \quad (2)$$
$$V(t,1) = b,\ t > 0, \quad (3)$$
$$V(0,x) = V_0(x), x \in [0,1]. \quad (4)$$

a, b et σ sont des constantes positives, V_0 est une fonction de classe $C^\infty([0,1])$.
On considère par ailleurs que $m(t,x)$ est une fonction continue de V telle que $0 \leq m(t,x) \leq 1$.
Pour approcher ce problème, on utilise une méthode des différences finies en posant $t^n = n\Delta t$, $x_i = i\Delta x$. On notera V_i^n l'approximation de $V(t^n, x_i)$ obtenue et $m_i^n = m(t^n, x_i)$.

1. Quelle est la nature de l'équation (1) ?
2. Dans un premier temps, on décide d'utiliser le schéma numérique suivant :

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\Delta t} + m_i^n V_i^n - \sigma \frac{V_{i+1}^n - 2V_i^n + V_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

   (a) Dessiner le stencil de ce schéma puis montrer qu'il est consistant et préciser son ordre.

   (b) Monter que ce schéma est stable au sens de la norme L^∞ sous la condition CFL :

$$\Delta t \leq \frac{1}{\min_i(m_i^n) + 2\sigma/\Delta x^2}. \quad (5)$$

   Que peut-on déduire des deux résultats précédents ?
3. On s'intéresse maintenant au schéma numérique suivant :

$$\frac{3V_i^{n+1} - 4V_i^n + V_i^{n-1}}{2\Delta t} + m_i^n V_i^{n+1} - \sigma \frac{V_{i+1}^{n+1} - 2V_i^{n+1} + V_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0.$$

4. Dessiner le stencil de ce schéma puis montrer qu'il est consistant et préciser son ordre.
5. Montrer que pour calculer V^{n+1}, on doit résoudre un système linéaire que l'on précisera.
6. Vérifier que la matrice de ce système linéaire est à diagonale fortement dominante et conclure quant à la stabilité du schéma numérique.
7. Quel peuvent être les avantages et les inconvénients de ce schéma par rapport au précédent ?

Université de Nantes — Master 1 de Mathématiques
UE : Calcul Différentiel et Géométrie

Examen du 21 juin 2013

Durée : 3h

Exercice I

Soit $p_1, \dots, p_n$ une famille de vecteurs différents de l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ et $\mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ la sphère unité. Notons

$$f(x) := \sum_{j=1}^{n} \|x - p_j\|^2$$

la somme des carrés des distances entre $x \in \mathbb{R}^3$ et p_j.

1. Calculer la différentielle $Df(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$.
2. Trouver les points $x \in \mathbb{S}^2$ qui minimisent $f(x)$.

Exercice II

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe gauche bi-régulière définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ telle que

$$\gamma(0) = (1,0,0), \quad \gamma'(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \quad \text{et} \quad \gamma''(0) = (0,0,1).$$

1. Montrer que si la torsion de γ est nulle, alors $\gamma(I)$ est contenu dans un plan. Déterminer une équation de ce plan.
2. Montrer que, réciproquement, si $\gamma(I)$ est contenu dans un plan, alors la torsion de γ est nulle.

Exercice III

On considère une surface C^∞ de révolution $S \subset \mathbb{R}^3$ paramétrée par

$$X(\theta, t) = (r(t)\cos(\theta), r(t)\sin(\theta), z(t)),$$

où $(t, \theta) \in I \times [0, 2\pi]$, $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, et $t \to (r(t), z(t))$ est une courbe plane C^∞ paramétrée par longueur d'arc.

1. Déterminer pour quelles valeurs de θ la courbe $t \to X(\theta, t)$ est une géodésique de S.
2. Déterminer pour quelles valeurs de t la courbe $\theta \to X(\theta, t)$ est une géodésique de S.

Exercice III

1. On considère l'ensemble

$$S := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2+y^2} - 2\right)^2 + z^2 - 1 = 0\right\}.$$

   (a) Montrer que S est une surface C^∞ de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Trouver une fonction 2π-périodique $r \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

   $$S = \{(r(\varphi)\cos(\theta), r(\varphi)\sin(\theta), \sin(\varphi)) : \varphi, \theta \in \mathbb{R}\}.$$

   (c) Á l'aide de (b) donner une paramétrisation $P : U \to V$ de S où $U \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert et $V \subset S$ est un voisinage de $M = (1,0,0) \in S$. Justifier la réponse.

T.S.V.P.

(d) Expliciter les coefficients

$$E(\theta,\varphi) = \left\langle \frac{\partial P}{\partial \theta}, \frac{\partial P}{\partial \theta} \right\rangle_{\mathbb{R}^3}, \quad F(\theta,\varphi) = \left\langle \frac{\partial P}{\partial \theta}, \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right\rangle_{\mathbb{R}^3}, \quad G(\theta,\varphi) = \left\langle \frac{\partial P}{\partial \varphi}, \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right\rangle_{\mathbb{R}^3}$$

de la première forme fondamentale de S dans cette paramétrisation.

(e) Calculer l'aire de S. Justifier la réponse.