MATHÉMATIQUES

Semestre 1

Université de Nantes
Faculté des Sciences et Techniques **Année 2013-2014**

X3M0060 Analyse et géométrie

Examen du janvier 2014. Durée : 2h00.

Sans document. Sans calculatrice. Sujet en recto verso.

Exercice 1. Soit $f(x,y) = (x^2 - 2yx + 2y^2 - 3)e^y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a). Déterminer les points critiques de f.

(b). Calculer les dérivées partielles secondes de f aux points critiques et déterminer les extréma locaux éventuels de f.

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 t\ln(1+t)\,dt. \tag{1}$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{t}{\cos^2 t}\,dt. \tag{2}$$

$$K = \int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{2t}{t^2+2t+2}dt. \tag{3}$$

Exercice 3. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 2 \text{ et } x \geq 1\}$.

1. Représenter graphiquement le domaine D dans le plan.

2. Soit f une fonction réelle continue sur D. Représenter de deux manières différentes l'intégrale double $\int\int_D f(x,y)dxdy$ en intégrales simples successives.

3. Calculer l'intégrale double $\int\int_D xy^2dxdy$.

Exercice 4. Soit ω la forme différentielle $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ avec

$$P(x,y) = y - \frac{y}{x^2+y^2}, \quad Q(x,y) = x + \frac{x}{x^2+y^2}$$

pour $(x,y) \neq O = (0,0)$.

(a). Calculer $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ pour $(x,y) \neq O$.

(b). Calculer directement l'intégrale curviligne $\int_{C_+(O,r)} \omega$, où $C_+(O,r)$ est le cercle de centre O et de rayon $r > 0$, parcouru dans le sens trigonométrique.

(c). Soit K un compact simple de $\mathbb{R}^2$ et γ le bord de K orienté dans le sens direct. Justifier que si K ne contient pas O, on peut appliquer la formule de Green-Riemann à ω sur K. En déduire la valeur de l'intégrale curviligne $\int_\gamma w$. Peut-on encore appliquer la formule de Green-Riemann à ω sur K, si K contient O à son intérieur ? Expliquer pourquoi.

Semestre 2

Université de Nantes
Faculté des Sciences et Techniques **Année 2013-2014**

X4M0080 Séries et transformée de Fourier

Examen du 12 mai 2014. Durée : 1h30.

Sans document. Sans calculatrice. Sujet en deux pages.

Exercice 1. (a). Déterminer le rayon de convergence, R, de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. On note $f(x)$ la fonction somme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

pour $x \in]-R, R[$. Justifier que $f(x)$ est une fonction de classe C^1 sur $]-R, R[$. Peut-on affirmer ici que $f(x)$ est continue sur $[-R, R]$? Justifier la réponse.

(b). Justifier que

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in]-R, R[.$$

Déterminer la fonction $f(x)$ pour $x \in]-R, R[$ et les limites $\lim_{|x|<R, x\to\pm R} f(x)$.

(c). En utilisant l'estimation sur le reste des séries alternées, montrer que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ est uniformément convergente sur $[-R, R]$ et définit une fonction continue sur $[-R, R]$. En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique telle que $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi[$.

(a). Dessiner le graphe de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Soit $\{a_n; n \geq 0\}$ et $\{b_n; n \geq 1\}$ les coefficients de Fourier de f. En utilisant la parité de $f(x)$, montrer que

$$b_n = 0, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)dx, \forall n.$$

Calculer les a_n et donner la série de Fourier de f.

(b). En utilisant le théorème de Dirichlet, étudier la convergence de la série de Fourier de $f(x)$ et préciser la somme éventuelle.

(c). Donner la formule de Parseval pour la série de Fourier de $f(x)$. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 3. Soit $g(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

(a). Montrer que la transformée de Fourier $\hat{g}(\xi)$ de g est une fonction continue pour $\xi \in \mathbb{R}$ et que $\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{g}(\xi) = 0$.

(b). Exprimer $\xi\hat{g}(\xi)$ à l'aide de la transformée de Fourier de $g'(x)$. Montrer que $\lim_{|\xi|\to\infty} \xi\hat{g}(\xi) = 0$.

(c). (c1). Déterminer les pôles de la fonction $\frac{1}{a^2+z^2}$ dans $\mathbb{C}$ et calculer le résidu à chacun des pôles.

(c2). Utiliser la méthode des résidus pour calculer $\hat{g}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Session 2
Rattrapages

Durée : 1h30.
Imprimés et notes de cours / TD / TP autorisés. Tout le reste est interdit.
Vous devez écrire vos algorithmes / fonctions / procédures en **pseudo-code**, comme en TD.
Il n'est pas obligatoire de faire les exercices dans l'ordre.
Le barème actuel n'est qu'indicatif ; il peut changer.

Licence 2
X3IO010

Université de Nantes
2013-2014

Examen deuxième session 2013-2014

1 Complexité de la factorielle (8 points : 2 - 2 - 4)

Considérons l'algorithme suivant.

```
FACTORIELLE( n )
if n = 0 ou n = 1 then
    return 1
else
    return n × FACTORIELLE( n − 1 )
end if
```

Cet algorithme calcule la factorielle d'un nombre n donné, retournant ainsi la valeur $n!$. On supposera que l'entrée n donnée sera toujours un entier naturel.

Le but de cet exercice est de calculer la complexité algorithmique en pire cas de FACTORIELLE. **En aucun cas, il vous est demandé de donner / expliquer / détailler les temps t.**

Énoncé :

1. Écrire la valeur $T(n)$ du temps d'exécution en fonction de n, de $T(x)$ avec $x \neq n$, et de $O(y)$, avec la bonne valeur pour y.
2. Écrire la valeur $T(n)$ du temps d'exécution en fonction de n et de $O(y)$, avec la bonne valeur pour y.
3. Donner la complexité en pire cas (en $O(\ldots)$) de l'algorithme, **sachant que la représentation d'un nombre entier se fait en binaire (c'est-à-dire en base 2)**. En déduire l'ordre de grandeur de la complexité en pire cas de FACTORIELLE.

2 Notation polonaise inverse (12 points : 4 - 4 - 4)

En arithmétique, vous avez l'habitude de voir une notation infixée, comme par exemple

$$3 \times (6 - (1 + 1))$$

Cette notation est conforme à ce que l'on dirait oralement : trois fois six moins ...

Cependant, l'utilisation des parenthèses est indispensable pour déterminer sur quels nombres portent les opérations.

Il existe d'autres notations permettant de s'affranchir des parenthèses. L'une d'elle est la notation dite polonaise inverse. Avec cette notation, l'expression ci-dessus s'écrira

$$3\ 6\ 1\ 1\ +\ -\ \times$$

Cette notation est plus simple et intuitive qu'elle n'y parait. Vous devez la regarder comme deux suites : celle des nombres (3 6 1 1) et celle des opérations (+ $-$ $\times$), se confrontant l'une à l'autre. Les deux nombres les plus à droite de leur suite vont se confronter à l'opération la plus à gauche de sa suite, opération qui sera consommée. Le calcul s'effectue, et le résultat du calcul est placé tout à droite de la suite des nombres.

$$3\ 6\ \boxed{1\ 1}\ \rightarrow \qquad \leftarrow \boxed{+}\ -\ \times$$

On calcul 1 + 1. Le résultat est 2, et donne :

$$3\ \boxed{6\ 2}\ \rightarrow \qquad \leftarrow \boxed{-}\ \times$$

On calcul 6 $-$ 2. Le résultat est 4, et donne :

$$\boxed{3\ 4}\ \rightarrow \qquad \leftarrow \boxed{\times}$$

On calcul 3 $\times$ 4. Le résultat est 12 et le calcul termine.

Dans cet exercice, on va considérer les simplifications suivantes :
- on va se limiter aux opérations +, $-$ et $\times$, et on va considérer un nombre négatif comme étant directement un nombre, par exemple -42, et non pas l'opération unaire $-$ appliquée au nombre 42.
- on va considérer que, pour la représentation d'une expression en notation polonaise inverse, les nombres sont des entiers, et les opérations sont des caractères (donc '+', '$-$' et '$\times$').
- les expressions infixées seront ici de sorte que l'imbrication des parenthèses se fera toujours sur l'opérande de droite, par exemple $a+(b-(c\times(d+e)))$. On considérera alors qu'une telle expression sera représentée par un tableau de chaînes de caractères sans prendre en compte les parenthèses, donnant ainsi pour l'exemple ci-dessus ["a", "+", "b", "-", "c", "×", "d", "+", "e"].
- on va considérer que les conversions caractères $\leftrightarrow$ chaîne de caractères sont automatiques.

Le but de l'exercice est de définir la structure de données **abstraite** représentant au mieux une expression arithmétique en notation polonaise inverse, et d'écrire une procédure qui lit une expression infixée pour la "convertir" en notation polonaise inverse en utilisant la structure de données choisies, puis une fonction qui retourne le résultat de l'expression en s'appuyant .

1. Décrire en français la structure de données que vous allez utiliser pour représenter, séparément, la suite des nombres et la suite des opérations. Plusieurs choix de structures de données sont possibles ; mais une seule est vraiment naturelle dans ce contexte. Prenez votre temps pour bien réfléchir à la structure de donnée qui permettra d'avoir une complexité en pire cas la plus petite possible pour les deux questions suivantes (donc lisez d'abord les questions suivantes). **Justifiez votre choix.**
2. Écrire la procédure qui, étant donné un tableau de chaînes de caractères représentant une expression infixée, lira ce tableau afin de remplir une structure de donnée pour la série des nombres et une autre pour la série des opérations. Pour cela, on supposera qu'on a accès à une fonction EstNombre(x) qui prend un caractère ou une chaîne de caractères x en entrée et renvoie vrai si x représente un nombre, faux sinon. Réfléchissez bien aux paramètres nécessaires pour cette procédure ! Écrire quelles sont les pré- et post-conditions.
3. Écrire la fonction qui, étant donné une série de nombres et une série d'opérations représentées par la structure de données choisie, calcule et retourne le résultat de l'expression d'origine. Écrire quelles sont les pré- et post-conditions.