MATHÉMATIQUES

Semestre 2

Université de Nantes
Faculté des Sciences et Techniques — Année 2014-2015

X4M0080 Séries et transformée de Fourier

Examen du 13 mai 2015. Durée : 1h30.

Sans document. Sans calculatrice. Sujet en deux pages.

Exercice 1. Soit $S(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ pour $x \in \mathbb{R}$ tel que la série entière soit convergente.

(a). Déterminer le rayon de convergence, R, de la série entière.

(b). En utilisant la méthode de dérivation et d'intégration terme à terme, calculer $S(x)$ pour x dans l'intervalle de convergence $]-R, R[$.

(c). Étudier la nature de la série lorsque $x = \pm R$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x$ sur $[-\pi, \pi[$.

(a). Dessiner le graphe de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Soit $\{a_n; n \geq 0\}$ et $\{b_n; n \geq 1\}$ les coefficients de Fourier de f. En utilisant la parité de $f(x)$, montrer que

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx, \forall n \geq 1.$$

Calculer les b_n et écrire la série de Fourier de f.

(b). En utilisant le théorème de Dirichlet, étudier la convergence de la série de Fourier de $f(x)$ et préciser sa somme éventuelle.

(c). Écrire la formule de Parseval pour la série de Fourier de $f(x)$. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 3. Soit $g(x) = \frac{1}{2+2x+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a). Démontrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$. En déduire que la transformée de Fourier $\hat{g}(\xi)$ de g est une fonction continue pour $\xi \in \mathbb{R}$ et que $\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{g}(\xi) = 0$.

(b). Exprimer $\xi\hat{g}(\xi)$ à l'aide de la transformée de Fourier de $g'(x)$. Montrer que $\lim_{|\xi|\to\infty} \xi\hat{g}(\xi) = 0$.

(c). On sait que la transformée de Fourier de la fonction $h(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$, $a > 0$, est égale à $\hat{h}(\xi) = \frac{\pi}{a}e^{-a|\xi|}$. En utilisant la méthode de changement de variable, montrer que

$$\hat{g}(\xi) = \pi e^{i\xi-|\xi|}.$$

(d). Écrire la formule de Parseval pour la transformée de Fourier de $g(x)$ et calculer l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2+2x+x^2)^2}\, dx$$