MATHÉMATIQUES

Semestre 2

Examen final

Jeudi 7 mai 2015
Durée de l'épreuve : 2h00.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Chaque réponse devra être justifiée de façon rigoureuse en précisant, le cas échéant, les théorèmes utilisés. La rédaction sera prise en compte dans la note.

Exercice 1 Soient $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geqslant 0$, et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions mesurables. On suppose qu'il existe une fonction $g \in L^2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \geqslant 0$, $|f_n| \leqslant g$, et on suppose que $f_n \longrightarrow f$ presque partout lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

1. Montrer que $f \in L^2(\mathbb{R})$, puis montrer avec soin que
$$\int_{\mathbb{R}} f_n^2 \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f^2,$$
lorsque $n \longrightarrow +\infty$.
2. Montrer que, lorsque $n \longrightarrow +\infty$
$$\int_{\mathbb{R}} f f_n \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f^2.$$
3. En déduire que $f_n \longrightarrow f$ dans $L^2(\mathbb{R})$, lorsque $n \longrightarrow +\infty$.
4. Application : on pose $f_n(x) = \dfrac{\cos(\frac{x}{n})}{1+|x|}$.
   (a) Montrer que la suite f_n converge dans $L^2(\mathbb{R})$, vers une limite f que l'on précisera.
   (b) Montrer que la convergence a également lieu dans $L^\infty(\mathbb{R})$.
   Indication : on pourra distinguer les cas $|x| \leqslant \sqrt{n}$ et $|x| \geqslant \sqrt{n}$.
   (c) Montrer que la convergence a lieu dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $2 \leqslant p \leqslant \infty$.

Exercice 2 La transformée de Fourier d'une fonction g intégrable sur $\mathbb{R}$ est définie par :
$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}\, g(x)\, dx \quad , \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Le but de ce problème est de calculer la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$ où $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I :

1. Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et calculer $\|f\|_1$.

2. Montrer que :

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \, Re \left(\int_0^{+\infty} e^{-ix\xi} \, f(x) \, dx \right).$$

3. Pour $N \geqslant 1$ et $x \geqslant 0$, on définit $f_N(x) = 2 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n e^{-(2n+1)x}$. Vérifier que :

$$f_N(x) = f(x) + (-1)^N \, \frac{e^{-(2N+2)x}}{\mathrm{ch}(x)}.$$

4. En déduire que

$$\lim_{N \to +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-ix\xi} \, f_N(x) \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-ix\xi} \, f(x) \, dx.$$

5. Déduire de ce qui précède que

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)}{(2n+1)^2 + \xi^2}.$$

Partie II :

On considère la fonction 2π-périodique, impaire, définie par $g(0) = g(\pi) = 0$, et $g(x) = \mathrm{ch}(ax)$ sur $]0, \pi[$ où a est un paramètre réel fixé.

1. Dessiner le graphe de la fonction lorsque $a = 1$.

2. Montrer que la série de Fourier de g est égale à :

$$Sg(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left((-1)^{n+1} \mathrm{ch}(a\pi) + 1 \right) \, \frac{n}{n^2 + a^2} \, \sin(nx).$$

On pourra faire deux intégrations par parties pour le calcul des coefficients de Fourier.

3. Que peut-on dire de la convergence de cette série ? Justifier soigneusement.

4. En déduire que :

$$\mathrm{ch}(\frac{a\pi}{2}) = \frac{2(\mathrm{ch}(a\pi) + 1)}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + a^2}.$$

Partie III :

1. (a) Vérifier que $\mathrm{ch}(2x) + 1 = 2\,\mathrm{ch}^2(x)$.

   (b) Montrer que

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \, f(\frac{\pi\xi}{2}).$$

2. En utilisant la question 1. de la partie I, vérifier le résultat de la question précédente dans le cas particulier où $\xi = 0$.