Rappels sur la théorie des ensembles

Module BD-Fichiers

(c) E. Desmontils, Dpt Informatique
Faculté des sciences et des techniques de Nantes

Année 2004-2005

Définitions fondamentales

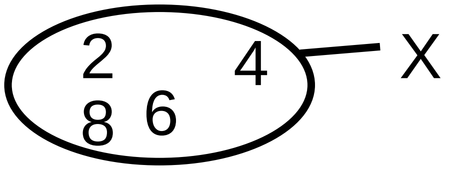
- Ensemble : collection non ordonnée d'objets différents.

  Soit X un ensemble et p un objet :
  - $p \in X$: signifie que l'objet p est un élément de l'ensemble X, ie p appartient à X
  - $p \notin X$: signifie que l'objet p n'est pas un élément de l'ensemble X, ie p n'appartient pas à X
- {1,4} = {4,1}
  - Les éléments peuvent être présentés dans un ordre arbitraire.
- Un ensemble ne peut pas contenir deux éléments égaux
  - ~~{1,4,1}~~

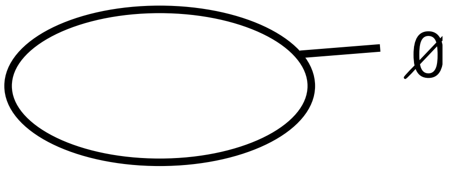
    Les éléments 1 et 1 ne sont pas distincts. Ils représentent le même élément.

Définir et représenter un ensemble

- Définir un ensemble
  - Par extension, énumération exhaustive des éléments
    - X={2,4,6,8}
  - Par caractérisation (compréhension, intension) :
  - X={p | pair(p) et 0 < p < 10}
- Représentation graphique d'un ensemble
  - Diagram de Venn

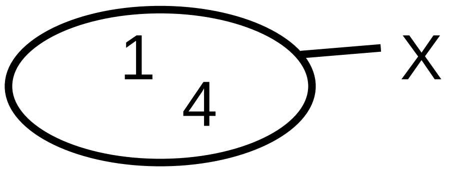


- Ensemble vide
  - Ensemble ne contenant pas d'éléments
  - {} = ∅
  - Attention, {0} ≠ {}



Égalité

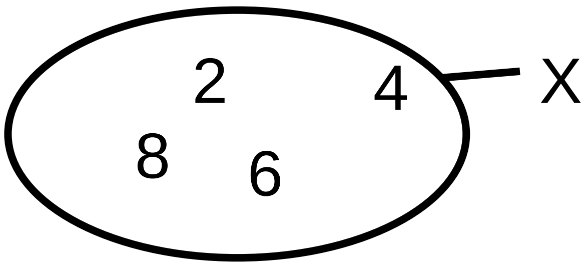
- Égalité de deux ensembles : deux ensembles X et Y sont égaux si et seulement si chaque élément de X est aussi un élément de Y ET que chaque élément de Y est aussi un élément de X



  - X=Y
  - ∀x∈X alors x∈Y et ∀y∈Y alors y∈X

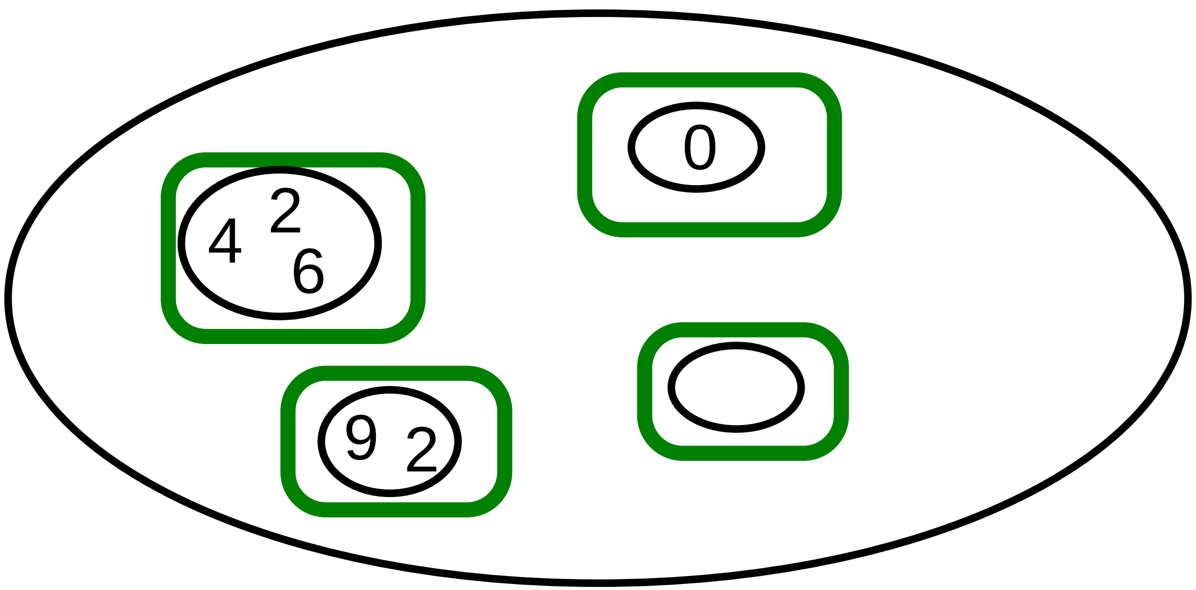
Cardinalité

- Cardinalité d'un ensemble :
  - le nombre d'éléments de l'ensemble



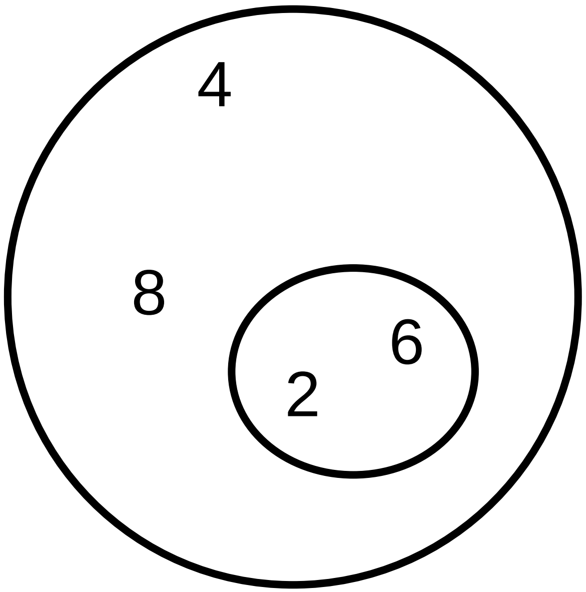
- Cardinalité(X) = Card(X) = |X| = 4

- Card({{4,2,6},{0},{},{9,2}}) = 4



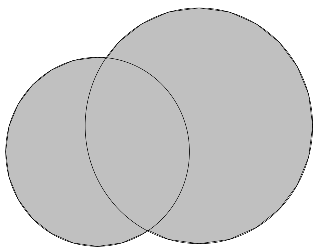
Sous-ensemble et inclusion

- Un ensemble Y est inclus dans un ensemble X si chaque élément de Y est aussi un élément de X.
  - $Y \subseteq X$
  - $Y \subseteq X$ et $Y \neq X \Leftrightarrow Y \subset X$
    - Y est appelé aussi *sous-ensemble propre* de X
  - $Y \subseteq X$ et $X \subseteq Y \Rightarrow X=Y$
  - Réfléxivité : $\forall X, X \subseteq X$
  - Anti-symétrie : $Y \subseteq X$ et $X \subseteq Y \Rightarrow X = Y$
  - Transitivité : $Y \subseteq X \subseteq Z \Rightarrow Y \subseteq Z$
- $\{2,6\} \subset \{4,6,8,2\}$
- $\forall\ X, \emptyset \subseteq X$

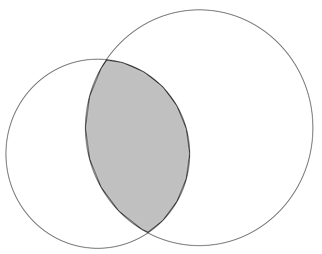


Opérations ensemblistes (1)

- **Union**
  - $Z = X \cup Y$ ssi $Z = \{z \mid z \in X \vee z \in Y\}$
  - $\{2,4,6,8\} \cup \{1,3,5,7,9\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
  - $X \cup \emptyset = X \cup \emptyset = X$

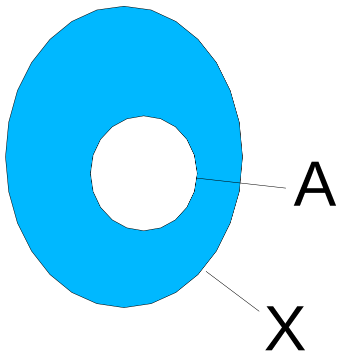


- **Intersection**
  - $Z = X \cap Y$ ssi $Z = \{z \mid z \in X \wedge z \in Y\}$
  - $\{2,4,6,8\} \cap \{1,2,3,4,5\} = \{2,4\}$
  - $X \cap \emptyset = X \cap \emptyset = \emptyset$
  - Y et Y sont disjoints ssi $X \cap Y = \emptyset$
    - $\{1,3,5,7,9\}$ et $\{2,4,6,8\}$ sont disjoints

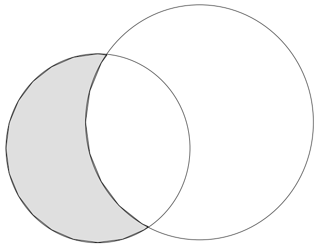


Opérations ensemblistes (2)

- **Ensemble complémentaire** : le complémentaire d'un sous-ensemble A d'un ensemble X est l'ensemble de tous les éléments qui ne sont pas dans A.
  - ${}^{A}_{X} = A^c = \overline{A} = \{x \mid x \in X \wedge x \notin A\}$ avec $A \subseteq X$
  - $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$; $A=\{2,4,6,8\}$
    $A^c=\{1,3,5,7,9\}$
  - $X^c=\emptyset$; $\emptyset^c = X$; $A^{cc}=A$; $A^c \cap A = \emptyset$; $A^c \cup A = X$

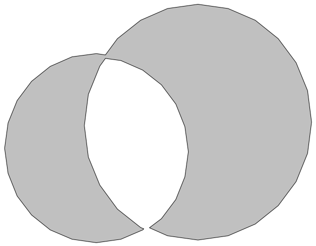


- **Différence** : X\Y sont les éléments de X qui n'appartiennent pas à Y
  - $X \backslash Y = X - Y = \{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}$
  - $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \backslash \{1,2,3,5,7,9\}=\{4,6,8\}$



Opérations ensemblistes (3)

- **Différence symétrique** : X Δ Y comprend les éléments dans X ou dans Y mais pas ceux qui sont dans X et dans Y
  - $X \Delta Y = (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X) = (X \cup Y) \backslash (X \cap Y)$
  - $\{1,2,3,4,5,6\} \Delta \{4,5,6,7,8,9\} = \{1,2,3,7,8,9\}$



- **Produit cartésien (produit**) : X Y est l'ensemble des couples (paires ordonnées) dont le premier élément appartient à X et le second à Y.
  - $X \;\; Y = \{ z=(x,y) \mid \;\; x \in X \wedge y \in Y\}$
- X={1,2,6}, Y={1,6},
  X Y = {(1,1), (1,6), (2,1),(2,6),(6,1), (6,2)}
  - Attention $(1,6) \neq (6,1)$ et $(2,6) \neq (6,2)$

Opérations ensemblistes (4)

- Ensemble des parties :

  (X) est l'ensemble de tous les sous-ensembles de X

  - $\forall Y \subseteq X, Y \in$ (X)
  - X = {1,3,2}

    (X) = {∅, {1}, {2}, {3}, {1,3}, {2,3}, {1,2}, {1,2,3}}

Quelques lois (1)

- Lois de commutativité
  - $X \cap Y = Y \cap X$
  - $X \cup Y = Y \cup X$
- Lois d'associativité
  - $X \cap Y \cap Z = (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$
  - $X \cup Y \cup Z = (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$
- Lois de distributivités
  - $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
  - $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
- $|X| + |Y| = |X \cup Y| + |X \cap Y|$

Quelques lois (2)

- Lois d'idempotence
  - $X \cap X = X$
  - $X \cup X = X$
- Lois d'absorption
  - $X \cup (X \cap Y) = X$
  - $X \cap (X \cup Y) = X$
- Lois de De Morgan
  - Soient $Z \subseteq X$ et $Y \subseteq X$
  - $(Z \cap Y)^c = Z^c \cup Y^c$
  - $(Z \cup Y)^c = Z^c \cap Y^c$