Devoir surveillé de Composites

Option Polymères et Composites, Polytech'Nantes, 2013-2014.
Documents autorisés : 2 pages de notes manuscrites et les formulaires sur l'anisotropie.

28 novembre 2013 - Durée: 2h.

1 Questions de cours (8 pts)

1. Rappeler les définitions des 4 grandeurs mécaniques caractéristiques des matériaux, qui permettent de comparer leurs performances. Expliquer comment le renforcement par des fibres UD influe sur ces différentes propriétés par rapport au comportement de la matrice seule.

   E : module d'Young, caractérise la rigidité ; $R_{e,02}$: limite d'élasticité conventionnelle en traction à 0.2% de déformation résiduelle ; R_m : résistance maximale en traction (F_{max}/S_0) ; $A\%$: allongement à la rupture.

   D'après la loi des mélanges sur les UD dans le sens L, la rigidité est augmentée par l'ajout de fibres, de même que la limite d'élasticité. L'allongement à la rupture est piloté par l'allongement à la rupture des fibres, donc généralement plus faible que celui de la matrice. Pour la résistance maximale, il existe une fraction limite en-dessous de laquelle le renforcement n'a pas d'effet bénéfique par rapport aux propriétés de la matrice seule.

2. Pour un matériau isotrope transverse, combien de constantes sont nécessaires pour définir la loi de comportement en élasticité linéaire ? Donner l'expression de la loi de comportement dans les axes d'anisotropie en terme de matrice de souplesse.

   Une loi de comportement élastique linéaire isotrope transverse nécessite 5 coefficients indépendants. Elle peut s'écrire sous la forme suivante, en terme de matrice de souplesse, lorsqu'on se trouve dans les axes d'anisotropie du matériau :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix}$$

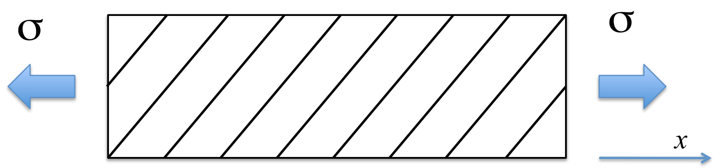

Figure 1: Traction selon $\vec{x}$ d'un composite UD à 45°.

3. Pour le matériau isotrope transverse évoqué ci-dessus, on réalise un essai de traction à 45° de la direction des fibres. Donner sans calcul la forme de la matrice de souplesse.

   Représentez sur un schéma l'allure de la déformation de la partie de l'éprouvette représentée figure 1. Que se passe-t-il si les mords imposent un déplacement selon $\vec{x}$ uniquement ?

   On a effectué une rotation autour d'un axe perpendiculaire à la direction des fibres, on fait donc apparaître de coefficients d'interaction mutuelle dans la matrice de comportement. Il y aura donc un couplage en traction et cisaillement si on tire selon $\vec{x}$. La matrice de souplesse aura ainsi l'allure suivante :

$$\begin{bmatrix} X & X & X & 0 & 0 & X \\ X & X & X & 0 & 0 & X \\ X & X & X & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & X & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X & X & 0 \\ X & X & X & 0 & 0 & X \end{bmatrix}$$

   Si on effectue une traction selon $\vec{x}$, donc avec une vecteur contrainte tel que seul σ_{11} soit non nul, on fait jouer les coefficients de la première colonne de la matrice de souplesse. On récupère alors des dilatations selon $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$, ainsi qu'un cisaillement dans le plan (x, y). Le rectangle initial dessiné sur la figure aura donc tendance à se transformer en parallélogramme. Si les mords empêchent ce mode de déformation, on engendrera un état de contrainte non uniforme et selon toute probabilité hétérogène.

4. Sous quelle condition peut-on appliquer la théorie des plaques en mécanique ? Pour le cas des composites stratifiés, rappelez les hypothèses de l'approche de Kirschhoff-Love ?

   La théorie des plaques s'applique à des structures planes dont une des dimensions est nettement plus petite que les deux autres.

   Pour les composites stratifiés, la théorie de Kirschhoff-Love suppose en outre que lors d'une déformation, les segments perpendiculaires au plan moyen de la plaque restent (i) droits et (ii) perpendiculaires au plan moyen subissant ainsi un mouvement de corps rigide. Chaque couche est supposé en **contraintes planes**.

2 Exercice (12 pts)

Le stratifié verre/époxy représenté sur la figure 2 est constitué de 8 couches unidirectionnelles de même épaisseur e dont les caractéristiques dans les directions d'anisotropie sont :
$E_L = 55$ GPa, $E_T = 10$ GPa, $G_{LT} = 4$ GPa, $\nu_{LT} = 0.35$. On a affaire à un stratifié de type $[0/+45/-45/90]s$ dont les orientations sont indiquées sur la figure 2. L'épaisseur totale de la plaque est $h = 1.6$ mm

1. Calculer les composantes de la matrice de rigidité $\boldsymbol{Q}_{ref}$ dans les axes principaux d'anisotropie.

$$\boldsymbol{Q}_{ref} = \begin{bmatrix} 56.25 & 3.58 & 0 \\ 3.58 & 10.23 & 0 \\ 0 & 0 & 8.00 \end{bmatrix} \text{GPa}$$

2. Calculer numériquement les matrices de rigidité de chaque couche dans le repère $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

$$\boldsymbol{Q}_0 = \boldsymbol{Q}_{ref} \qquad ; \qquad \boldsymbol{Q}_{90} = \begin{bmatrix} 10.23 & 3.58 & 0 \\ 3.58 & 56.25 & 0 \\ 0 & 0 & 8.00 \end{bmatrix} \text{GPa}$$

$$\boldsymbol{Q}_{+45} = \begin{bmatrix} 22.41 & 14.41 & 16.27 \\ 14.41 & 22.41 & 16.27 \\ 16.27 & 16.27 & 29.66 \end{bmatrix} \text{GPa} \quad ; \quad \boldsymbol{Q}_{-45} = \begin{bmatrix} 22.41 & 14.41 & -16.27 \\ 14.41 & 22.4100 & -16.27 \\ -16.27 & -16.27 & 29.66 \end{bmatrix} \text{GPa}$$

3. Justifier l'absence des couplages traction-cisaillement <u>et</u> traction-flexion dans ce composite.

   Pas de couplage traction-cisaillement car le composite est équilibré (autant de plis de même épaisseur à des angles opposés).
   Pas de couplage traction flexion car la stratification est symétrique. La matrice $\boldsymbol{B}$ sera donc nulle.

4. Donner les valeurs des matrices de comportement du stratifié $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{D}$ en fonction des matrices de rigidité des différentes couches.

   La matrice $\boldsymbol{B}$ est nulle par symétrie. Il n'est pas utile de le vérifier. Pour les autres matrices, on obtient par application des résultats du cours :

$$\boldsymbol{A} = 2e \times (\boldsymbol{Q}_0 + \boldsymbol{Q}_{90} + \boldsymbol{Q}_{+45} + \boldsymbol{Q}_{-45}) = \begin{bmatrix} 44.52 & 14.39 & 0 \\ 14.31 & 44.52 & 0 \\ 0 & 0 & 30.13 \end{bmatrix} \text{kN/mm}$$

$$\boldsymbol{D} = \frac{e^3}{3} \times (74\boldsymbol{Q}_0 + 2\boldsymbol{Q}_{90} + 38\boldsymbol{Q}_{+45} + 14\boldsymbol{Q}_{-45}) = \begin{bmatrix} 14.26 & 2.72 & 1.04 \\ 2.72 & 5.43 & 1.04 \\ 1.04 & 1.0414 & 5.73 \end{bmatrix} \text{kN.mm}$$

5. Lors de son utilisation dans une structure composite, ce matériau est soumis à une combinaison de traction et de flexion telle qu'on ait au point le plus chargé :

$$^{T}\vec{N} =< 1118, 0, 0 > \text{N.mm}^{-1} \quad \text{et} \quad ^{T}\vec{M} =< 0, 141, 0 > \text{N}$$

Déterminer en ce point les valeurs de déformations en membrane $\{\hat{\varepsilon}_m\}$ et en courbure $\{\hat{\chi}\}$.

$\boldsymbol{B}$ étant nulle, les déformations intégrées sont découplées et peuvent s'obtenir par résolution des systèmes 3x3 associés :

$$[A]\{\hat{\varepsilon}_m\} = \{N\} \qquad ; \qquad [D]\{\hat{\chi}_m\} = \{M\}$$

On obtient ainsi :

$$\varepsilon_{xx} = 2.8\% \quad ; \quad \varepsilon_{yy} = -0.9\% \quad ; \quad \varepsilon_{xy} = 0$$

$$\chi_{xx} = -5.31\,10^{-3}mm^{-2} \quad ; \quad \chi_{yy} = 29.5\,10^{-3}mm^{-2} \quad ; \quad \chi_{xy} = -4.39\,10^{-3}mm^{-2}$$

6. Commenter et justifier le résultat du problème en flexion.

On obtient un résultat assez quelconque en flexion, avec une composante de torsion et une flexion dans la direction perpendiculaire. Le stratifié est bien symétrique et équilibré pour les problèmes en membrane, par contre, il est quelconque pour les sollicitations de flexion et présente donc une réponse anisotrope générale à une sollicitation simple.

7. Pouvez-vous situer la position la plus contrainte ?

Pour le chargement considéré, combinaison d'une traction et d'une flexion autour de l'axe $\vec{y}$, le point le plus contraint sera le point inférieur de la couche 1 (le plus bas).

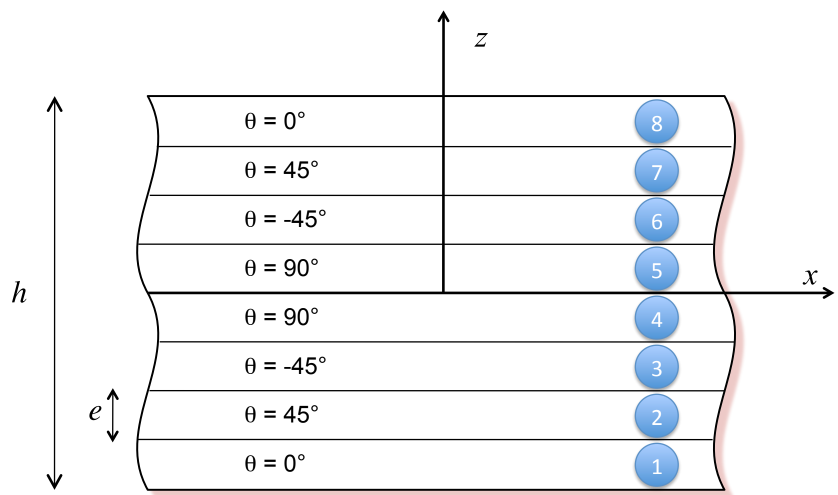

Figure 2: Composite stratifié à 8 couches.