

EXAMEN DE COMPOSITES

Options PC / ITM
20 janvier 2016 - Correction

1 Questions plus ou moins courtes (11 pts)

1. Dans le cas d'un composite unidirectionnel, justifier l'existence d'un taux de renfort critique minimal. Que peut-on dire de l'effet du renforcement sur la limite d'élasticité?

Considérons la loi des mélanges à la rupture, atteinte quand la déformation totale atteint A_f :

$$\sigma_c = (R_m)_c = V_f \sigma_f + (1 - V_f) \sigma_m = V_f E_f A_f + (1 - V_f) \sigma_m (A_f)$$

L'allongement à la rupture étant généralement faible pour les fibres, la contrainte atteinte dans la matrice peut être faible devant la contrainte à la rupture de la matrice. Pour que le renforcement par les fibres soit bénéfique, il faut que $(R_m)_c > (R_m)_m$, ce qui induit une notion de fraction de fibre minimale pour avoir une amélioration de R_m .

Pour ce qui est de la limite d'élasticité, on repart de la loi des mélanges sur la contrainte écrite précédemment, et on considère que la limite d'élasticité est atteinte premièrement dans la matrice (la contrainte dans les fibres est toujours nettement plus élevée). La déformation vaut alors $\varepsilon_c = \varepsilon_m = (R_e)_m / E_m$. On en déduit la limite d'élasticité du composite :

$$(R_e)_c = V_f E_f (R_e)_m / E_m + (1 - V_f) (R_e)_m = (R_e)_m \left(1 + V_f \left(\frac{E_f}{E_m} - 1 \right) \right)$$

Le module d'Young des fibres étant largement plus grand que celui de la matrice, on en déduit que la limite d'élasticité du composite est toujours améliorée par l'ajout de fibres.

2. Elasticité linéaire : pourquoi la loi de comportement d'un matériau élastique doit-elle être décrite par un tenseur d'ordre 4? (1 pt)

Un comportement élastique linéaire implique une relation linéaire entre le tenseur des déformations ε et celui des contraintes σ . Chaque composante de σ , σ_{ij} est donc une combinaison linéaire des composantes de ε , les ε_{kl} . On a ainsi :

$$\forall (i, j), \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

en adoptant la convention d'Einstein sur les sommations.

Il apparaît donc naturellement une relation entre les deux tenseurs qui fait apparaître un tenseur d'ordre 4, appelé tenseur d'élasticité :

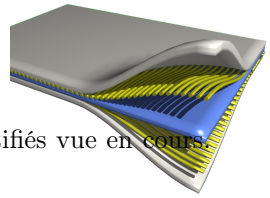
$$\sigma = \mathbb{C} : \varepsilon$$

ainsi que l'opération de contraction double, notée avec :

3. Expliquer comment cette loi tensorielle entre les tenseurs des contraintes et les déformations peut-être écrite sous forme d'une relation matricielle. (1.5 pts)

En tenant compte des symétries des tenseurs de contrainte et de déformation, on montre facilement que $C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{jikl} = C_{jilk}$. Ceci induit un grand nombre de simplifications permettant de réduire les 81 composantes de \mathbb{C} à seulement 36. Notons que les considérations énergétiques (symétries de Onsager), permettent encore de réduire ce nombre à 21 composantes indépendantes. La symétrie des contraintes et des déformations implique 6 composantes indépendantes que l'on peut ranger dans des vecteurs (contraintes et déformations respectivement). La relation entre les tenseurs peut alors être remplacée par une relation matricielle équivalente :

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\}$$



4. Plusieurs hypothèses sont formulées pour établir la théorie simplifiée des stratifiés vue en cours. Pouvez-vous les citer ? (1.5 pts)

- ☐ Géométrie de plaque : l'épaisseur doit être faible devant les deux autres dimensions, qui définissent le plan de la plaque.
- ☐ Contraintes planes : les surfaces supérieures et inférieures sont supposées libres de tout chargement mécanique. L'épaisseur étant faible, on suppose que l'état de contrainte est plan : $\sigma(\vec{x}) \cdot \vec{z} = \vec{0}$ en tout point de la plaque repéré par \vec{x} .
- ☐ Cinématique : hypothèse de déformation de solide rigide des normales au plan moyen de la plaque : les lignes droites perpendiculaires au plan moyen de la plaque restent droites et perpendiculaires au plan moyen au cours de la déformation.

Conséquence sur le champ de déplacement :

$$\vec{u}(M) = \vec{u}(G)(x, y) + \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\theta}(x, y)$$

où G désigne un point du plan moyen, θ le vecteur rotation des lignes droites au point G . La seconde hypothèse (perpendicularité) permet ensuite d'exprimer directement $\vec{\theta}$ en fonction des dérivées de la composante verticale du déplacement, comme pour le cas des poutres.

- ☐ Petites déformations.

5. Réflexion : proposez une ou plusieurs solutions d'empilement qui permettrait d'obtenir un composite stratifié (fait de plis UD) dont le comportement **en flexion** serait isotrope ou presque le cas échéant. (*Il n'y a pas de solution unique.*) (1 pt)

Obtenir un tel comportement pour un composite est très difficile, car en flexion, la distance d au plan moyen joue un rôle très important (effet en d^3).

En pratique, ce sont les couches externes qui joueront un rôle prédominant. Il faut donc essayer de symétriser celles-ci au maximum, la solution la plus simple étant d'augmenter l'épaisseur du composite tout en conservant une alternance des couches conduisant à un quasi-iso pour les effets de membrane. On peut aussi imaginer de jouer sur les épaisseurs, mais en pratique c'est difficile à réaliser, les plis étant tous fabriqués de la même façon.

6. Pour chacun des empilements représentés sur la figure suivante, **cochez un ou plusieurs qualificatifs** adaptés parmi les 4 proposés (répondre sur la feuille et indiquer nom et prénom). (4 pts pas de points négatifs pour mauvaise réponse)

2 Etude d'un cas de plaque stratifiée (9 pts)

1. Calculer les matrices de la loi de comportement intégrée $[A]$, $[B]$ et $[D]$.

Les matrices de comportement de chaque plis sont calculées à partir du formulaire. On obtient :

$$[Q^0] = \begin{bmatrix} 141.1 & 3.434 & 0 \\ 3.434 & 11.08 & 0 \\ 0 & 0 & 11.6 \end{bmatrix} kN.mm^{-2} \quad [Q^{90}] = \begin{bmatrix} 11.08 & 3.434 & 0 \\ 3.434 & 141.1 & 0 \\ 0 & 0 & 11.6 \end{bmatrix} kN.mm^{-2}$$

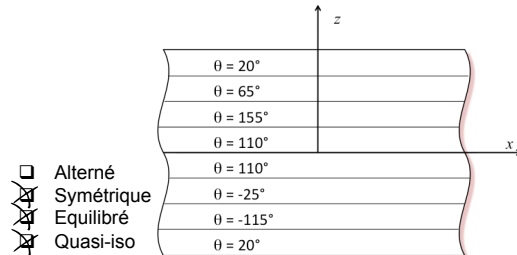
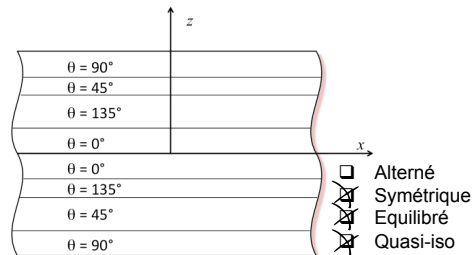
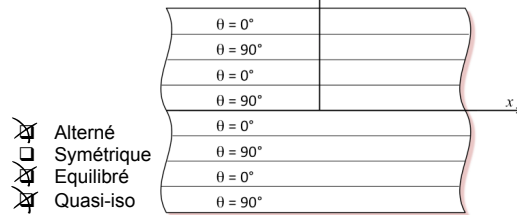
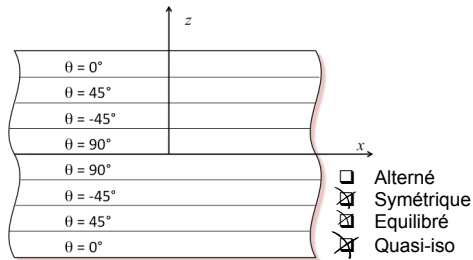
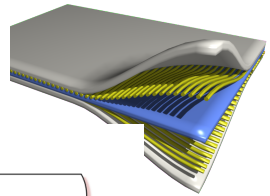
$$[Q^{30}] = \begin{bmatrix} 85.68 & 26.33 & 58.49 \\ 26.33 & 20.69 & 21.11 \\ 58.49 & 21.11 & 57.38 \end{bmatrix} kN.mm^{-2}$$

- On obtient ensuite :

$$[A] = 2e ([Q^0] + [Q^{90}] + [Q^{30}]) = \begin{bmatrix} 80.86 & 11.29 & 19.88 \\ 11.29 & 58.76 & 7.177 \\ 19.88 & 7.177 & 27.4 \end{bmatrix} kN.mm^{-1}$$

NB : ne pas oublier de multiplier par 1000 pour le calcul des déformations qui suit, on est en $kN.mm^{-1}$.

- Le stratifié étant symétrique, la matrice $[B]$ est nulle.



NOM :

PRÉNOM :

- Pour la matrice $[D]$, on obtient

$$[D] = \sum_{k=1}^6 [Q^k] \frac{z_{k-1}^3 - z_k^3}{3} = \begin{bmatrix} 10.78 & 0.83 & 1.34 \\ 0.83 & 1.63 & 0.48 \\ 1.34 & 0.48 & 2.08 \end{bmatrix} \text{ kN.mm}$$

- Calculer les déformations de membrane et de courbure induites par la force de traction.

On impose ici un chargement de traction selon l'axe 0° et il y a découplage entre les effets de membrane et ceux de flexion, il est donc inutile de calculer les courbures, elles sont automatiquement nulles. Pour les déformations de membrane, il faut en revanche résoudre le système suivant :

$$\{N\} = [A] \{\varepsilon_m\}$$

La force de traction est appliquée sur une largeur de 60mm, elle correspond donc à une force par unité de longueur $N_{xx} = F/l = 166.7 \text{ N.mm}^{-1}$. Les déformations s'obtiennent donc en calculant :

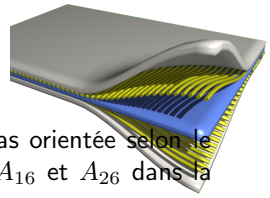
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \left(1000 \times \begin{bmatrix} 80.86 & 11.29 & 19.88 \\ 11.29 & 58.76 & 7.177 \\ 19.88 & 7.177 & 27.4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{Bmatrix} 166.7 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.253\% \\ -0.027\% \\ -0.177\% \end{Bmatrix}$$

- En déduire le déplacement d'un point de l'extrémité.

La déformation est supposée constante dans l'échantillon, le champ de déplacement \vec{u} peut se calculer de la manière suivante : $\vec{u} = \varepsilon \vec{x}$. Il est ainsi facile de calculer les variations de longueur.

- Dans le sens de la longueur : $\Delta L = L\varepsilon_{xx} = 500 \times 0.253/100 = 1.27 \text{ mm}$.
- Dans le sens de la largeur : $\Delta l = L\varepsilon_{yy} = 60 \times (-0.027)/100 = -0.016 \text{ mm}$. Les déplacements dus à cette déformation sont très faible.
- Déplacement dû au cisaillement : $\Delta v = \varepsilon_{xy}L = -0.625 \text{ mm}$

- Donner l'allure de la déformée de la pièce, en supposant les extrémités de l'échantillon libres de se déplacer dans toutes les directions.



Le rectangle se transforme en parallélogramme car la direction principale n'est pas orientée selon le sens de la traction. On peut le constater directement par la présence des termes A_{16} et A_{26} dans la matrice $[A]$.

5. Suite à cette observation, les étudiants décident de découper des éprouvettes de mêmes dimensions dans les plaques réalisées, mais à différents angles α par rapport aux plis à 0° . Ils effectuent à chaque fois le test de traction à 10kN sur ces différentes éprouvettes. Pour quelle orientation obtiendront-ils un déplacement uniquement dans le sens de la traction? (NB : tourner les plis d'un angle α équivaut à tourner la force F d'un angle $-\alpha$).

Comme indiqué dans l'énoncé, il suffit pour simuler cette situation, de faire tourner le chargement F d'un angle α : $\vec{F} = F \cos \alpha \vec{x} + F \sin \alpha \vec{y}$. Le second terme représente alors un effort tranchant appliqué sur la face de normale \vec{x} . Le vecteur des forces généralisées imposé est alors

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} F \cos \alpha \\ 0 \\ \sqrt{2}F \sin \alpha \end{Bmatrix}$$

En effectuant le même calcul que précédemment mais pour différentes valeurs de α , on peut tracer l'évolution de la déformation de cisaillement en fonction de α , on constate qu'on obtient une déformation de cisaillement nulle pour un angle compris entre 9 et 10° (0.157 et 0.174 rad). L'ajout des deux plis à 30° a donc eu pour effet de modifier légèrement les axes principaux. On constate qu'ils restent quand même proche de l'axe longitudinal.