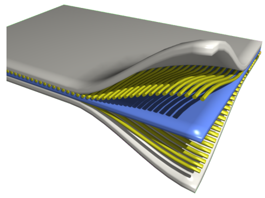


Examen de Composites: corrigé

Options PC / ITM

22 novembre 2017 - Nb de pages **2** - *Documents autorisés : 1 recto-verso manuscrit*

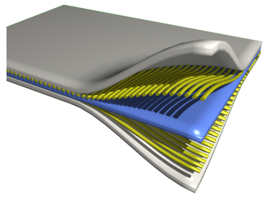
1 Questions de cours (6 pts)

1. Elasticité linéaire - symétries élastiques : Pourquoi peut-on réduire de 81 à 21 le nombre de constantes nécessaire à la définition d'une loi élastique générale. Comment est réduit ce nombre en présence d'un plan de symétrie matérielle ? de deux plans orthogonaux de symétrie matérielle ? d'une symétrie de révolution de la microstructure ?
   La symétrie du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et de celui des déformations ε implique le passage de 81 à 36 coefficients ($C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{jilk} = C_{jikl}$). Les relations de Onsager (considérations sur l'énergie de déformation, conduisent aussi à $C_{ijkl} = C_{klij}$, ce qui permet la réduction à 21. Pour un plan de symétrie, ce nombre tombe à 13, puis à 9 pour 2 symétries planes orthogonales (matériau orthotrope). Avec une symétrie de révolution, ce nombre tombe à 5.
2. Quelles caractéristiques mécaniques d'un matériau sont améliorées par l'ajout de fibres.
   Le module d'élasticité, la limite d'élasticité sont systématiquement améliorée par l'ajout de fibres. La résistance maximale en traction n'est améliorée qu'au-dessus d'une certaine fraction, appelé taux de renfort critique.
3. Décrire (illustrer à défaut) l'hypothèse cinématique de Kircchoff-Love. Justifier l'utilisation de l'hypothèse de contraintes planes dans cette théorie.
   Les segments droits orthogonaux au plan moyen de la plaque restent droits et orthogonaux au cours de la déformation. Ils subissent donc un mouvement de type solide rigide, entièrement caractérisé par le déplacement et la rotation du milieu G du segment considéré. En outre, l'hypothèse de perpendicularité permet de relier la rotation du segment aux pentes du déplacement horizontal de G, $w(x, y)$.
4. Réflexion : proposez une ou plusieurs solutions d'empilement qui permettrait d'obtenir un composite stratifié (fait de plis UD) dont le comportement **en flexion** serait isotrope ou presque le cas échéant. (*Il n'y a pas de solution unique.*)
   Il est important de rappeler que les plis externes sont dominants sur le comportement en flexion, c'est donc sur ces plis que se joue la majeure partie du comportement en flexion de la plaque. Toute solution allant vers un **équilibrage des orientations des couches externes** peut fonctionner. Pour ce faire et conserver une influence significative d'une couche plus interne, il est préférable d'utiliser des **empilements épais**.

2 Cas de traction (7 pts)

Une plaque composite carrée de côté $a = 100$ mm, encastrée à une de ses extrémités, est soumise à une résultante $F = 60kN$ sur la face orientée selon $\vec{x}$. Elle est faite d'un empilement de 4 couches undirectionnelles avec la séquence d'orientation suivante (de bas en haut) : $45°/0°/0°/45°$. Chaque couche possède les caractéristiques suivantes : $E_L = 60$ GPa, $E_T = 15$ GPa, $G_{LT} = 6$ GPa, $\nu_{LT} = 0.35$, épaisseur 0.5mm.
1) Que peut-on dire de cet empilement ?
Il s'agit d'un empilement symétrique, la mtrice de couplage $[B]$ sera donc nulle.

2) Calculer les matrices de rigidité de chaque pli.



$$[Q^0] = \begin{bmatrix} 61.9 & 5.4 & 0 \\ 5.4 & 15.5 & 0 \\ 0 & 0 & 12.0 \end{bmatrix} \text{GPa} \qquad \text{et} \qquad [Q^{45}] = \begin{bmatrix} 28.0 & 16.0 & 16.4 \\ 16.0 & 28.0 & 16.4 \\ 16.4 & 16.4 & 33.3 \end{bmatrix} \text{GPa.}$$

3)

$$[A] = 2e([Q^0] + [Q^{45}]) = \begin{bmatrix} 89.9 & 21.5 & 16.5 \\ 21.5 & 43.5 & 16.5 \\ 16.5 & 16.5 & 45.3 \end{bmatrix} \text{kN.mm}^{-1}.$$

4) En l'absence de couplage flexion-traction, on peut résoudre séparément les parties membrane et flexion. Il suffit donc de résoudre le système suivant :

$$[A]\{\hat{\varepsilon}_m\} = \{\hat{N}\}$$

où

$$\left\{\hat{N}\right\} = \left\{ \begin{matrix} Nxx \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 60000/100 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 600 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} \text{N.mm}^{-1}$$

ce qui donne

$$\{\hat{\varepsilon}\} = \left\{ \begin{matrix} 0.77\% \\ -0.32\% \\ -0.16\% \end{matrix} \right\}$$

Les deux premier termes sont classiques.Il est important de remarquer la présence du troisième terme qui indique la présence de cisaillement.

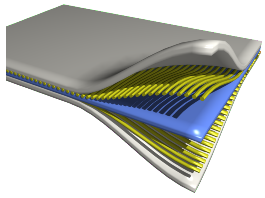
5) En déduire le déplacement du point central de la face chargée. Commenter. Comment obtenir un comportement plus acceptable ?

3 Plaque composite en flexion (7 pts)

On considère une plaque stratifiée de longueur $L = 30cm$ et de largeur 5cm, constituée de couches d'UD d'épaisseur $e = 0.25$mm, et dont les propriétés mécaniques sont $E_L = 150$ GPa ; $E_T = 20$ GPa ; $G_{LT} = 7$ GPa ; $\nu_{LT} = 0.25$. L'empilement des couches est le suivant (90°, 45°, -45°, -45°, 45°, 90°).
Elle est encastrée en A, et liée en B à une plaque indéformable de hauteur $h = BC$ à laquelle on impose un déplacement u au point C. En B, ce chargement se traduit essentiellement par une rotation θ_B de l'extrémité droite.
1) On a $\tan\theta_B = \frac{u}{h}$, ce qui donne dans l'approximation des petits angles, $\theta_B = \frac{u}{h}$.

2) Le chargement revient à un moment imposé aux extrémités, ce qui conduit à un moment de flexion constant tout au long de la poutre. Dans la théorie classique des poutres, $M = EI\gamma_x = EI\frac{d\theta}{dx} = EI\frac{d^2v}{dx^2}$ conduit à une courbure constante le long de la poutre.

3) Le stratifié est symétrique, la matrice de couplage membrane-flexion $[B]$ est donc nulle. Dans le cas d'un problème tel que celui-ci où le chargement est de type moment, seule la matrice de rigidité en flexion-torsion $[D]$ intervient. C'est la seule à calculer. Pour cela, il faut quand même calculer les matrices de rigidité $[Q^k]$



de chaque couche en utilisant le formulaire.
On a tout d'abord :

$$[Q^0] = \begin{bmatrix} 151 & 5.04 & 0 \\ 5.04 & 20.2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} \text{GPa.}$$

Puis (unité GPa) :

$$[Q^{90}] = \begin{bmatrix} 20.2 & 5.04 & 0 \\ 5.04 & 151 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}, [Q^{45}] = \begin{bmatrix} 52.4 & 38.4 & 46.3 \\ 38.4 & 52.4 & 46.3 \\ 46.3 & 46.3 & 80.7 \end{bmatrix}, [Q^{-45}] = \begin{bmatrix} 52.4 & 38.4 & -46.3 \\ 38.4 & 52.4 & -46.3 \\ -46.3 & -46.3 & 80.7 \end{bmatrix}.$$

Ce qui donne pour la matrice $[D]$:

$$[D] = \sum_{k=1}^{N} \frac{z_{k+1}^3 - z_k^3}{3} [Q^k] = \begin{bmatrix} 8.36 & 4.20 & 2.90 \\ 4.20 & 34.30 & 2.90 \\ 2.90 & 2.90 & 9.49 \end{bmatrix}.$$

Pour calculer le moment intégré imposé à l'extrémité, il suffit maintenant de calculer le vecteur des courbures et de multiplier $[D]$ par celui-ci.
On a $\theta_B = \frac{5}{50} = 0.1rd$, donc $\gamma_x = \frac{0.1}{300} mm^{-1} = 3.33\,10^{-4} mm^{-1}$.
D'où

$$\{\hat{\gamma}\} = \left\{ \begin{array}{c} 3.33\,10^{-4} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

et

$$\left\{\hat{M}\right\} = [D]\{\hat{\gamma}\} = \left\{ \begin{array}{c} 2.8 \\ 1.4 \\ 0.96 \end{array} \right\}$$

Il apparait donc un moment de flexion selon x ce qui est normal, mais aussi des couplages, car il existe un moment de flexion dans la direction y ainsi qu'un moment de torsion.

4) Si on appliquait un moment au lieu d'imposer la rotation et donc l'ensemble de la cinématique, on libérerait les effets dus au moment que nous venons de calculer. Nous obtiendrions donc une flexion dans les directions x et y ainsi qu'une torsion autour de l'axe x.

5) En utilisation l'hypothèse cinématique de Kirchhoff-Love, calculer la contrainte maximale dans le pli supérieur.
Dans l'hypothèse de Kirchhoff-Love, la déformation varie linéairement dans l'épaisseur. Elle est liée à la courbure :

$$\{\sigma^4\} = [Q^{90}] \left((\{0\} + 2e \left\{ \begin{array}{c} \gamma_x \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \right)$$

6) Pour améliorer la rigidité de flexion de cette plaque, par rapport à la sollicitation à laquelle elle se trouve soumise, il suffit de mettre les plis à 90° à 0°. Par ailleurs, on diminuera les couplages flexion-torsion indésirables en éloignant les plis à +/-45° du centre (ajout de plis à 90° par exemple). En conservant des +/-45 équilibrés et symétriques tels que ceux-ci on ne pourra toutefois pas éliminer complètement l'effet.