

DS 2023-24 - corrigé

1/ Propriétés des plis:

$$E_f = 390 \text{ GPa} ; E_m = 4 \text{ GPa} ; \nu_f = 55\%$$

$$G_f = 40 \text{ GPa} ; G_m = 1,48 \text{ GPa} ;$$

$$\nu_f = 0,2 ; \nu_m = 0,35$$

des de mélange :

$$E_L = \nu_f E_f + (1 - \nu_f) E_m = 216,3 \text{ GPa}$$

$$\nu_{LT} = \nu_f \nu_f + (1 - \nu_f) \nu_m = 0,2675$$

$$G_{LT} = \nu_f G_f + (1 - \nu_f) G_m = 22,7 \text{ GPa}$$

$$\frac{1}{E_T} = \frac{\nu_f^2}{\nu_f E_f + (1 - \nu_f) E_m} + \frac{1 - \nu_f^2}{E_m} \quad [\text{Jacquet, 2000}]$$

$$\Rightarrow E_T = 14,89 \text{ GPa}$$

2/ Comportement des plis:

$$[Q^0] = \begin{bmatrix} 217,4 & 4,0 & 0 \\ 4,0 & 15,0 & 0 \\ 0 & 0 & 45,3 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$

$$[Q^{90}] = \begin{bmatrix} 15,0 & 4,0 & 0 \\ 4,0 & 217,4 & 0 \\ 0 & 0 & 45,3 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$

3/ Comportement intégré:

$$[A] = \sum_k e_k [Q^k] = e (6[Q^0] + 4[Q^{90}])$$

avec $e = 0,18 \mu\text{m}$

$$[A] = \begin{bmatrix} 245,5 & 7,2 & 0 \\ 7,2 & 172,7 & 0 \\ 0 & 0 & 81,6 \end{bmatrix}$$

en kN.mm^{-2}

$[B] = [0]$ car l'empilement est symétrique.

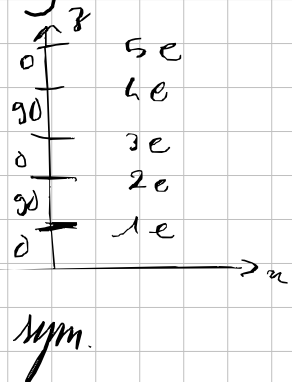
$$[D] = \sum_{k=1}^{10} \frac{z_k^3 - z_{k-1}^3}{3} [Q^k] = \frac{e^3}{3} (162[Q^0] + 88[Q^{90}])$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 71,0 & 1,95 & 0 \\ 1,95 & 41,9 & 0 \\ 0 & 0 & 22,0 \end{bmatrix} \text{ kN.mm}$$

Détails de calculs:

Couches à 0

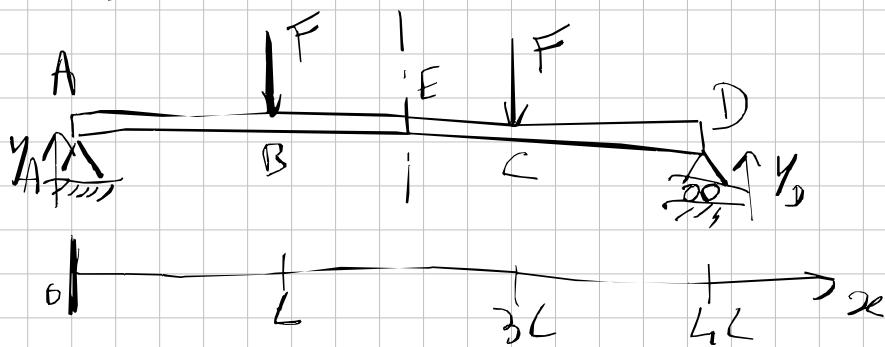
$$2 \times \left[\underbrace{(1^3 - 0^3)}_1 + \underbrace{(3^3 - 2^3)}_{19} + \underbrace{(5^3 - 4^3)}_{61} \right] = 162$$



Couches à 90

$$2 \times \left[\underbrace{2^3 - 1^3}_7 + \underbrace{4^3 - 3^3}_{37} \right] = 88$$

4/ Diagramme de Flexion:

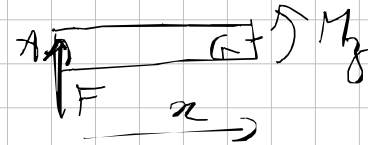


La symétrie apporte directement $y_A = y_D = F$ et on peut se contenter de rebondir sur la moitié de la poutre.

Segment $[AB]$, $x \in [0, L]$

PFS $M_z - Fx = 0$
en moment

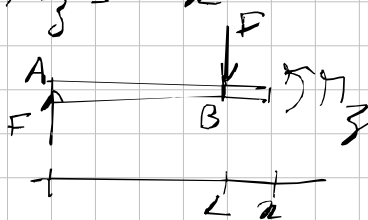
soit donc



$$M_z = Fx$$

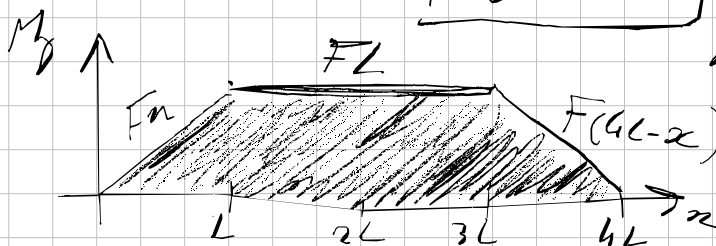
Segment $[BE]$, $x \in [L, 2L]$

PFS en Moment en B



$$M_z - Fx + F(x-L) = 0$$

soit donc $M_z = FL$



Le moment est constant dans la partie centrale.

NB:

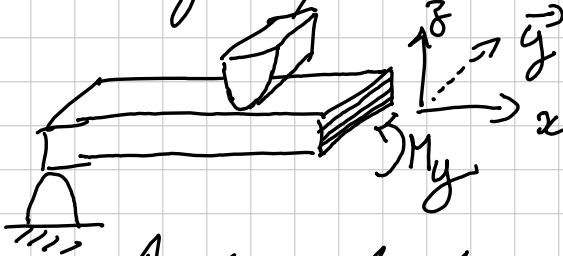
L'effort tranchant est nul dans la partie centrale, il n'y aura pas lieu de le prendre en compte dans la question suivante.

5/ Effets intégrés - segment [BC]

Aucune composante de résultante : effort trondant, effort-normal $\rightarrow$ tous nuls

$$\{N\} = \{0\}$$

Il n'y a qu'un moment de flexion autour de $\vec{y}$



A M_y est la notation RdM pour la rotation autour de $\vec{y}$, dans la théorie des poutres ce moment est associé au moment de la contrainte σ_{xz} , c'est donc M_{xz} qui est la composante des effets intégrés concernée.

$$\text{On aura donc } FL = "M_y" = \iint z \sigma_{xz} dz dy$$

$$\text{et } M_{xz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{xz} dz$$

$$\text{Ce qui permet d'écrire } M_{xz} = \frac{FL}{l}$$

l : largeur de 40 mm.

$$\text{A.N.: } M_{xz} = \frac{1000 \cdot 100 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} = 2500 \text{ N} = 2,5 \text{ kN}$$

b/ Le système étant découplé, on a

$$\{\varepsilon_m\} = [A]^{-1} \{0\} = \{0\}$$

$$\{\gamma\} = [D]^{-1} \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\gamma_{xx} = -0,352 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^{-1}$$

$$\gamma_{yy} = 0,0164 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^{-1}$$

2/ Contraintes maximales

Dans la partie centrale le moment est constant,
la distribution des contraintes est donc indépendante
de l'endroit considéré.

$$\text{Pour chaque couche } k: \{\sigma^k\} = [\bar{Q}^k] \{\varepsilon_m\} + z \{\gamma\}$$

$$\text{avec ici } \{\varepsilon_m\} = \{0\}$$

Les contraintes maximales se situeront donc dans les
couches extrêmes pour $z = z_0$ ou $z = z_{10}$

mais on pourrait regarder les couches à 90° en

$$z = z_1 \text{ et } z = z_9$$

les signes à ce stade sont délicats !

Fions nous au bon sens, les couches inférieures doivent être en traction.

Etape de la couche 1: en $z = z_0 = -0,9 \text{ mm}$

$$\{\sigma^1\}_{\max} = [Q^0](-0,9)\{\gamma\}$$

Ce qui donne $\sigma_{xx}^{\max} = 6889 \text{ MPa}$

$$\sigma_{yy}^{\max} = -105 \text{ MPa}$$

Pour la couche 2, en $z = z_1 = -0,72 \text{ mm}$

$$\{\sigma^2\} = [Q^{90}](-0,72)\{\gamma\}$$

Ce qui donne $\sigma_{xx}^{2,\max} = 375 \text{ MPa}$

$$\sigma_{yy}^{2,\max} = -155 \text{ MPa}$$

8/ Allure de l'évolution des contraintes dans l'épaisseur :

