

DS MCOMP - 2021-2025

Plaque sous chargement thermique

Stratification Cross Ply symétrique, 12 plis d'épaisseur 200 μm .

Matériau: PEEK / CF, $V_F = 60\%$

1/ Loi de comportement intégrée:

$$[Q^0] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}, \text{ avec } Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} = 213,3 \text{ GPa}$$

$$\text{avec } E_L = 212 \text{ GPa}$$

$$E_T = 15 \text{ GPa}$$

$$\nu_{LT} = 0,3$$

$$G_{LT} = 8 \text{ GPa}$$

$$Q_{22} = \frac{E_T}{E_L} \cdot Q_{11} \approx 15,1 \text{ GPa}$$

$$Q_{12} = \nu_{LT} Q_{22} = 4,53 \text{ GPa}$$

$$Q_{66} = 2G_{LT} = 16 \text{ Pa}$$

$$\underline{[Q^0]} = \begin{bmatrix} 213,3 & 4,53 & 0 \\ 4,53 & 15,1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}; \underline{[Q^{90}]} = \begin{bmatrix} 15,1 & 4,53 & 0 \\ 4,53 & 213,3 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

en GPa.

$$[A] = 6e([Q^0] + [Q^{90}])$$

$$= 1,2 \times \begin{bmatrix} 228,4 & 9,06 & 0 \\ 9,06 & 228,4 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 274,1 & 10,9 & 0 \\ 10,9 & 274,1 & 0 \\ 0 & 0 & 38,4 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{mm}^{-1}$$

en $\text{kN} \cdot \text{mm}^{-1}$, $e = 0,2 \text{ mm}$.

$$[D] = \sum_{k=1}^{12} \frac{3k^3 - 3k_{-1}^3}{3} [Q^k]$$

$$[D] = \sum_{k=1}^N \frac{3k^3 - 3k - 1}{3} [Q^k]$$

$$\begin{array}{r} 1111111111 \\ 1111111111 \\ \hline 1111111111 \end{array}$$

$$[D] = \frac{2e^3}{3} \left([Q^{00}] + 7[Q^0] + 19[Q^{90}] + 37[Q^{\circ}] + 61[Q^{99}] + 91[Q^{\circ}] \right)$$

$$= \frac{2e^3}{3} (135[Q^0] + 81[Q^{99}])$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 160,1 & 5,22 & 0 \\ 5,22 & 103,0 & 0 \\ 0 & 0 & 18,43 \end{bmatrix} \text{ kN. mm}$$

Calcul sans conséquence sur la suite.

2/Dilatation libre:

$$\Delta T = 160 - 20 = 140 \text{ K.}$$

$$2.1/ \{ \varepsilon^0 \} = \begin{Bmatrix} \alpha_L \Delta T \\ \alpha_T \Delta T \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 38 \cdot 10^{-4} \\ 73 \cdot 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{ \varepsilon^{90} \} = \begin{Bmatrix} 73 \cdot 10^{-3} \\ 38 \cdot 10^{-4} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Efforts thermiques:

La symétrie implique $\{ N^{th} \} = \{ 0 \}$

$$\{ N^{th} \} = 6e \left([Q^0] \{ \varepsilon^0 \} + [Q^{90}] \{ \varepsilon^{90} \} \right)$$

$$\{ N^{th} \} = \begin{Bmatrix} N_{xx}^{th} \\ N_{yy}^{th} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,245 \\ 0,245 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ kN.mmm}^{-1}$$

Dilatations:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_m \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N^{th} \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} A \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N^{th} \end{Bmatrix}$$
$$\{ \gamma \} = \{ 0 \}$$

Il suffit d'inverser le système 2x2 suivant:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{xx}^{th} \\ N_{yy}^{th} \end{Bmatrix}$$

$$\text{avec } [A] = \begin{bmatrix} 274,1 & 10,9 & 0 \\ 10,9 & 274,1 & 0 \\ 0 & 0 & 38,4 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[\varepsilon_m]} = \frac{1}{75012} \begin{bmatrix} 274,1 & -10,9 \\ -10,9 & 274,1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,245 \\ 0,245 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{75012} \begin{Bmatrix} 75,21 \\ 79,27 \end{Bmatrix} = \boxed{\begin{Bmatrix} 0,86 \cdot 10^{-3} \\ 0,86 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix}}$$

2 - On peut en déduire les coefficients de dilatations de la plaque

$$\boxed{\alpha_x = \frac{\varepsilon_{xx}}{\Delta T} = 6,13 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}}$$

$\alpha_y = \alpha_x$

La plaque a un comportement isotrope en dilatation, avec un coefficient de dilatation faible, piloté largement par le comportement thermomécanique dans le sens des fibres.

3 - Contraintes:

$$[\sigma^0] = [Q^0] ([\varepsilon_m] - [\varepsilon^{th,0}])$$

$$\{\sigma^{90}\} = [Q^{90}] ([\varepsilon_m] - [\varepsilon^{th,90}])$$

1.N: On trouve alors

$$\{\sigma^0\} = \begin{Bmatrix} 94,34 \\ -94,34 \\ 0 \end{Bmatrix} MPa \quad \text{et} \quad \{\sigma^{90}\} = \begin{Bmatrix} -94,34 \\ +94,34 \\ 0 \end{Bmatrix} MPa$$

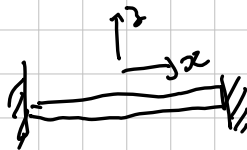
Ce qui montre clairement que les contraintes sont auto-équilibrées:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^0 + \sigma_{xx}^{90} &= 0, \text{ donc } \int_{-h}^h \sigma_{xx} dz \\ &= \sum_{k=1}^n \sigma_{xx}^k = 0 \quad (\sigma_{xx}^0 + \sigma_{xx}^{90}) = 0 \end{aligned}$$

De même pour σ_{xy}^k .

On observe une alternance de traction selon $\vec{x}$ dans les couches à 0° et de compression selon $\vec{x}$ dans les couches à 90° qui voudraient se dilater plus. Selon $\vec{y}$, c'est le phénomène opposé.

3/ Dilatation aux 2 parois indéformables.



$$3.1) \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_m \\ \gamma \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^{th} \\ M^{th} \end{Bmatrix}$$

Le système étant découplé,

$$\{N\} = [A]\{\epsilon_m\} - \{N^{th}\}$$

avec ici $\{N\} = \begin{Bmatrix} N_{xz} \\ 0 \end{Bmatrix}$ et $\epsilon_m = \begin{Bmatrix} 0 \\ \epsilon_{yy} \\ 0 \end{Bmatrix}$

↑
découplage traction-déflexion

En se limitant aux 2 équations utiles, on a :

$$\begin{Bmatrix} N_{xz} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \epsilon_{yy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_{xz}^{th} \\ N_{yy}^{th} \end{Bmatrix}$$

↑
identique au précédent.

$$N_{xz} = A_{12} \epsilon_{yy} - N_{xz}^{th}$$

$$0 = A_{22} \epsilon_{yy} - N_{yy}^{th}$$

→

$$\epsilon_{yy} = \frac{N_{yy}^{th}}{A_{22}}$$

$$N_{xz} = \frac{A_{12}}{A_{22}} N_{yy}^{th} - N_{xz}^{th}$$

$$3.2) \quad \varepsilon_{yy} = 0,89 \cdot 10^{-3}$$

$$N_{xx} = -0,235 \text{ kN.mm}^{-1}$$

$$N_{xx} = -235 \text{ N.mm}^{-1} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz$$

$$\text{Contrainte moyenne } \langle \sigma_{xx} \rangle = \frac{1}{h} N_{xx} = \frac{1}{12e} N_{xx}$$

$$\langle \sigma_{xx} \rangle = -97,9 \text{ MPa}$$

Malgré une déformation faible, la pression sur la paroi est très élevée.

3.3) Contraintes:

$$\begin{aligned} \{\sigma^0\} &= [Q^0] \left(\left\{ \varepsilon_{xy}^0 \right\} - \left\{ \varepsilon_{th,0} \right\} \right) \\ \{\sigma^{90}\} &= [Q^{90}] \left(\left\{ \varepsilon_{xy}^{90} \right\} - \left\{ \varepsilon_{th,90} \right\} \right) \end{aligned}$$

$$\{\sigma^0\} = \begin{Bmatrix} -88,67 \\ -97,71 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \{\sigma^{90}\} = \begin{Bmatrix} -107,1 \\ 97,71 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

On a un auto-équilibre selon $\hat{y}$, direction libre de contrainte, mais pas selon $\hat{x}$. On peut recalculer

$$\langle \sigma_{xx} \rangle = \frac{1}{h} \sum_k \{\sigma^k\} = \begin{Bmatrix} -97,9 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

Question 3.4 :



On trouve un coefficient de dilatation moyen de $\alpha_m = 6,9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, qui induit une déformation thermique

$$\{\varepsilon^{th}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_m \Delta T \\ \alpha_m \Delta T \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,858 \cdot 10^{-3} \\ 0,858 \cdot 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Retrouve-t-on la contrainte moyenne ?

$$\langle \sigma_{xx} \rangle = \frac{1}{h} N_{xx}$$

$$\text{avec } \{N\} = [A] \{\varepsilon_m\} - \{N^{th}\}$$

Pour une approche classique, on écrit

$$\{\sigma\} = [Q] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^{th}\}) \quad \text{E}_1$$

Équivalent ici à

$$\{\sigma_{moy}\} = \frac{1}{h} \{N\} = \frac{1}{h} [A] \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ \varepsilon_{yy} \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_m \Delta T \\ \alpha_m \Delta T \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \quad \text{E}_2 \text{ Raideur moyenne}$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{xx} \rangle &= \frac{1}{h} \left(A_{11} \alpha_m \Delta T + A_{12} (\varepsilon_{yy} - \alpha_m \Delta T) \right) \\ 0 &= \frac{1}{h} \left(A_{12} \alpha_m \Delta T + A_{22} (\varepsilon_{yy} - \alpha_m \Delta T) \right) \end{aligned}$$

Soit

$$\varepsilon_{yy} = \alpha_m \Delta T + \frac{A_{12}}{A_{22}} \alpha_m \Delta T = \underline{0,892 \cdot 10^{-3}} \quad \text{idem.}$$

et du comp

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{xx} \rangle &= \frac{1}{h} \left(-A_{11} \alpha_m \Delta T + A_{12} (\varepsilon_{yy} - \alpha_m \Delta T) \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(A_{12} \varepsilon_{yy} - (A_{11} + A_{12}) \alpha_m \Delta T \right)\end{aligned}$$

$$\langle \sigma_{xx} \rangle = - \underline{97,9 \text{ MPa}} \quad \text{idem.}$$

- L'approche en contraintes et déformation moyenne permet de retrouver ces résultats, avec une approche thermo-élastique usuelle.
- C'est une approche de milieu continu équivalent
- Elle ne permet pas de retrouver les contraintes de chaque pli.

NB: Question TRÈS difficile.

Question 3.5: facile!

La contrainte dépend de la déformation, non du déplacement. Le chargement thermique crée une déformation.